UNIVERSIDADE FEDERAL SANTA CATARINA - UFSC

Departamento de Matemática

ABORDAGEM $\mathcal{Q}_r$ PARA ESTABILIDADE REGIONAL DE SISTEMAS CHAVEADOS[1]

S. PALOMINO BEAN

RELATÓRIO TÉCNICO
MTM/CFM

Agosto 2002

[1]Este relatório foi submetido à revista TEMA/SBMAC para publicação.

Abordagem $\mathcal{Q}_r$ para Estabilidade Regional de Sistemas Chaveados

S. Palomino Bean [2]

MTM/CFM - UFSC

PO Box 476, 88040 900 Florianópolis, SC, Brasil.

Resumo

Neste trabalho se estuda a análise de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ e se calcula o domínio de atração de uma classe particular de sistemas híbridos conhecida como sistemas chaveados. No conceito de estabilidade $\mathcal{Q}_r$, usa-se uma função de Lyapunov dependente dos estados de tipo polinomial e diferente da quadrática convencional. O problema a resolver é apresentado como um problema de otimização convexa em termos de inequações matriciais lineares (LMIs). Resultados numéricos são apresentados exibindo uma abordagem menos conservadora que a quadrática convencional e a abordagem biquadrática [1], no cálculo das respectivas regiões de estabilidade para um dado exemplo.

1 Introdução

Sistemas com chaveamentos são exemplos de sistemas híbridos do mundo real onde se misturam decisões lógicas e leis de controle contínuo. Exemplos de sistemas híbridos aparecem nos sistemas com relés, chaveamentos, motores de passo e outros controladores de movimento, nos sistemas de controladores com estrutura variável, nos veículos inteligentes, nos sistemas de controle de auto-estrada, nos sistemas de manufatura moderna flexível e nos sistemas de controle de vôos.
Este trabalho trata de uma classe particular de sistemas híbridos, os sistemas chaveados. Neste sentido, outros autores como Johansson [2] e Pettersson [3], trabalhando com sistemas lineares por partes, tratam da análise de estabilidade propondo a procura de uma função de Lyapunov não convencional, fazendo que essa função seja quadrática por partes (abordagem Pwq) e aplicando a metodologia para análise de sistemas chaveados.
Em trabalhos anteriormente apresentados, [1, 4], se fez uso da extensão do conceito de estabilidade biquadrática [5] para sistemas chaveados obtendo resultados menos conservadores quando comparados com outras metodologias.
Na abordagem proposta neste trabalho, usa-se o conceito de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ [6], nesse conceito os chaveamentos também dependem da dinâmica da variável de estado contínua e procura-se uma função de Lyapunov de caráter polinomial[3] e comum ao sistema. Observe que, na abordagen biquadrática a estrutura da função de Lyapunov é similar a abordagem $\mathcal{Q}_2$ ($r = 2$), porém a matriz P que define essa estrutura será diferente, isso será mostrado nos resultados.
O conceito de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ é uma extensão, para sistemas chaveados, da formulação proposta em Trofino [6] para a construção de funções de Lyapunov dependentes do estado, desenvolvida para problemas de estabilidade robusta para sistemas incertos não lineares.

[2] E-mail:`palomino@mtm.ufsc.br,  Fax:  (48) 331-9774`

[3] O grau do polinômio é maior quanto maior é o valor de $r = 2d$ para $d \geq 1$.

O objetivo deste trabalho é o tratamento da análise de estabilidade e o cálculo do domínio de atração dessa classe de sistemas, resolvendo-o como um problema de otimização convexa em termos de inequações matriciais lineares (LMIs) [7]. Exemplos numéricos ilustram a vantagem da metodologia apresentada, fornecendo regiões de estabilidade maiores que as obtidas em [1].
Algunas notações são necessárias. O conjunto dos inteiros positivos $\mathcal{J}_n = \{1, \cdots, n\}$, o conjunto das n-uplas inteiras não negativas $\mathbb{J}^n$, o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, o espaço das matrizes $\mathbb{R}^{n \times m}$. S' é a matriz transposta da matriz real S e $S > 0$ ($S \geq 0$) indica uma matriz definida positiva (semidefinida positiva). A notação $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ é o meta-politopo determinado pelo produto cartesiano dos politopos $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$. Por último, dado um conjunto finito de vetores V, $\mathbf{Co}\{V\}$ denota o fecho convexo dos elementos de V. Como trabalha-se com sistemas autônomos, a variável t será omitida toda vez que necessário.

2 O Problema

Dado o sistema chaveado afim da forma:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i \ , \quad x \in X_i \ , \quad i \in \mathcal{J}_n \ , \quad t \geq 0, \tag{1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ denota a componente contínua do estado assumindo valores no conjunto $X_i \subset \mathbb{R}^{n_x}$ e $i \in \mathcal{J}_n$ denota a variável discreta, assume-se que $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ são matrizes constantes, e $b_i \in \mathbb{R}^{n_x}$ são vetores constantes.
Com a finalidade de evitar comportamentos indesejáveis nos sistemas abordados, assumem-se as seguintes hipóteses:

A 1 *A origem, $x = 0$, é um ponto de equilíbrio do sistema (1)*[4] *e considera-se $\mathcal{B}_x$ um politopo em uma vizinhança da origem no qual a estabilidade local será estudada.*

A 2 $\mathbb{X} = X_1 \cup \ldots \cup X_n \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$. *Cada conjunto X_i possui interior não vazio e não há superposição entre as regiões do modelo, ou seja, os interiores desses conjuntos são disjuntos dois a dois.*

A 3 *O lado direito de (1) é uma função limitada para cada $i \in \mathcal{J}_n$.*

A 4 *Num intervalo finito de tempo há um número finito de chaveamentos.*

A 5 *Nas l_k fronteiras das regiões adjacentes a X_k, não há modos deslizantes, isto é, se $x(t^-) \in X_i \cap X_j$, então $x(t) \notin X_i \cap X_j$, onde $x(t^-)$ denota a posição da trajetória imediatamente antes do tempo t.*

Para apresentação da metodologia, os conjuntos X_i são denotados na forma seguinte:

$$X_i = \{ \ x \ : \ \psi_{ik}(x) \geq 0, \ k = 1, \ldots, m_i \} \, , i \in \mathcal{J}_n, \tag{2}$$

onde $\psi_{ik}(x) \in \mathbb{R}$ são funções afins em x, e m_i é o número de funções ψ que descreve X_i.
Por conveniência, é associada a cada variável discreta i a função lógica $\delta_i(x) = \delta_i, i \in \mathcal{J}_n$ com $\delta_i \in \{0, 1\}$. Define-se, então, a função vetorial lógica $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{J}^n$:

$$\delta(x) \triangleq [\ \delta_1 \ldots \delta_n \ ]' = c_i \ \text{ se } \ x(t^-) \text{ e } x(t) \text{ pertencem a } X_i, \tag{3}$$

onde c_i a i-ésima coluna da matriz identidade I_n. Assim sendo, se o estado discreto assume um dado valor $i \in \mathcal{J}_n$, quando $x \in X_i$, a i-ésima componente da função vetorial lógica δ assume o

[4] Isto é, existe uma região X_i onde $b_i = 0$.

valor unitário e todos os valores restantes são iguais a zero. A imagem da função vetorial lógica está definida pelo conjunto[5]

$$\Delta \triangleq \{\ c_1, \ldots, c_n\ \} \subset \mathbb{J}^n. \tag{4}$$

Observa-se que os elementos δ_i de δ satisfazem $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$. Sem perda de generalidade, neste trabalho, escolhe-se δ_n como referência e, assim, $\delta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$. Com essa escolha, o sistema (1) pode ser expresso como um sistema associado. Isto será visto nas próximas seções.

3 Definições e conceitos

Nesta seção, faz-se extensão para sistemas chaveados, do conceito de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ dada em Trofino [6]. Para apresentação dessa abordagem, serão necessárias algumas definições e conceitos expostos a seguir.

A função de Lyapunov

Dadas as matrizes constantes U_i, $T_{ij} \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_i}$ para $i = 0, \cdots, (d-1)$, define-se Θ_i como sendo matrizes da mesma ordem que T_{ij} para cada i, como se segue:

$$\Theta_i(x) \ = \ \sum_{j=1}^{n_x} T_{ij} x_j + U_i \quad \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_i} \quad i = 0, ..., (d-1)\ , n_0 = n_x, \tag{1}$$

onde x_j é a j-ésima componente do vetor x.
$\Theta_i(x) \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_i}$ é uma matriz afim para cada $i = 0, \ldots, d-1$, onde d é um inteiro positivo.
Definem-se as matrizes $\Theta(x)$ e $\mathcal{P}(x)$ da forma seguinte:

$$\Theta(x) \ = \ \begin{bmatrix} \Theta_0 \\ \Theta_1 \Theta_0 \\ \vdots \\ \Theta_{d-1} \Theta_{d-2} \cdots \Theta_0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\mathcal{P}(x) = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

A função de Lyapunov candidata, $v(x)$, será considerada da seguinte forma

$$v(x) = x' \mathcal{P}(x) x, \tag{4}$$

onde a matriz P de $\mathcal{P}(x)$ é de dimensão conveniente e deve ser determinada. Também a matriz dada, $\Theta(x)$, é uma matriz afim em x que define a estrutura da função de Lyapunov.

$$\Theta(x) \ = \ \sum_{i=1}^{n_x} T_i x_i + U \quad \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_x}, \tag{5}$$

onde T_i, U são matrizes constantes da mesma dimensão de $\Theta(x)$, e x_i é a i-ésima componente do vetor x.
A partir da matriz $\dot{\Theta}(x)$ e do vetor x, define-se a matriz denotada por $\Theta_x(x)$ como se segue.

[5] Por simplicidade de notação, será considerado apenas $\delta \in \Delta$ toda vez que $\delta(x) = c_i \in \Delta$.

Por ser afim em x, considera-se a seguinte notação

$$\dot{\Theta}(x)x = \sum_{i=1}^{n_x} T_i \dot{x}_i x = \sum_{i=1}^{n_x} T_i x r_i \dot{x} = \Theta_x(x)\dot{x},$$
$$\Theta_x(x) = \sum_{i=1}^{n_x} T_i x r_i, \tag{6}$$

onde r_i é a i-ésima linha da matriz identidade I_{n_x}.

Definição 3.1 (Estabilidade $\mathcal{Q}_r$) *Considerando $r = 2d$ e dado um politopo $\mathcal{B}$, diz-se que a origem do sistema (1) é localmente $\mathcal{Q}_r$ estável se existir uma função $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$ com $\mathcal{P}(x)$ da forma (3) e funções[6] α_1, α_2, α_3 de classe $\mathcal{K}$ tais que sejam satisfeitas as seguintes condições para todo $x \in \mathcal{B}$:*

- $\alpha_1(\|x\|) \leq v(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$
- $\dot{v}(x) = x'\dot{\mathcal{P}}(x)x + x'A(x)'\mathcal{P}(x)x$
$+ x'\mathcal{P}(x)A(x)x \ \leq -\alpha_3(\|x\|)$

Essa definição estende, para o caso de sistemas chaveados, a noção de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ apresentada em Trofino [6] no contexto de sistemas não lineares incertos e implica em estabilidade assintótica da origem do sistema chaveado. Quando são satisfeitas as condições da Definição 3.1, a função $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$ é dita ser uma função de Lyapunov para o sistema chaveado e é comum a todas as regiões X_i. Com isso, garante-se a estabilidade $\mathcal{Q}_r$ da origem do sistema (1). Pode-se então, obter uma estimativa da região de atração para a origem desse sistema.

Domínio de Atração

Se um sistema e localmente estável, o domínio de atração do sistema é uma região invariante do espaço de estados, tal que toda trajetória que se inicia em algum ponto dessa região converge assintoticamente para a origem do sistema. Mais detalhes podem ser encontrados em Khalil [8]. A estimativa do domínio de atração é feita calculando-se a maior superfície de nível da função de Lyapunov dentro do politopo $\mathcal{B}_x$. Com essa finalidade, define-se o seguinte conjunto como estimativa dessa região:

$$\Upsilon = \left\{ x \, : \, v(x) = x'\mathcal{P}(x)x \leq 1 \right\}. \tag{7}$$

O politopo $\mathcal{B}_x$ pode ser descrito por $\mathcal{B}_x = \left\{ x \, : \, a_l' x \leq 1 \ , \ l = 1, \ldots, n_e \right\}$, onde $a_l \in \mathbb{R}^{n_x}$ são vetores dados associados às faces do politopo. Também, $\mathcal{B}_x$ pode ser representado de forma equivalente pelos seus vértices.

A estimativa Υ deve estar incluída em $\mathcal{B}_x$, então usando os fundamentos teóricos em Trofino [6] e Boyd et al [7], a condição para determinar $\Upsilon \subset \mathcal{B}_x$ pode ser colocada em termos de LMIs como se segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} a_l' & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_l \\ 0 \end{bmatrix} & (P + LC + C'L') \end{bmatrix} \geq 0, \ l = 1, \ldots, n_e,$$

com $C = \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ \Theta(x) & -I_{n_1} \end{bmatrix}$ e L é uma matriz livre a ser determinada. A matriz C_x é obtida

[6]Veja definição das funções α_i no Apêndice.

fazendo uso da sua forma geral[7] :

$$C_z = \begin{bmatrix} z_2 & -z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_3 & -z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_{n_z} & -z_{n_z-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_z-1} \times \mathbb{R}^{n_z} \quad \text{com} \quad z \in \mathbb{R}^{n_z}. \tag{8}$$

Como feito em Trofino [6], a região de atração estimada Υ será otimizada pela minimização do traço da matriz $P + LC + C'L'$ $(\mathsf{tr}(P + LC + C'L'))$.
Nota-se que todas as variáveis auxiliares necessárias para a representação do sistema na forma (15) estão definidas pela relação de igualdade em (14). Além disso, as regras de chaveamento são definidas pelas relações de desigualdades em (2). Assim, para-se obterem as condições de estabilidade, deve-se levar em consideração o conjunto de igualdades e desigualdades:

$$\psi_{ik}(x) \geq 0 \quad \text{for} \quad k = 1, \ldots, m_i \text{ e } i \in \mathcal{J}_n \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix} = 0 \tag{10}$$

Associada à definição da função de Laypunov candidata, é ainda de interesse a seguinte restrição de igualdade:

$$\begin{bmatrix} \Theta(x) & -I_{n_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Theta(x)x \end{bmatrix} = 0. \tag{11}$$

4 Análise de Estabilidade

Nesta seção serão descritas condições suficientes que conduzirão à proposta do Teorema de estabilidade.
Fazendo uso da função δ e do conjunto Δ definidos em (3) e (4), respectivamente, e considerando o n-ésimo termo de δ como variável de referência, ou seja, $\delta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$, reescreve-se (1) na forma associada dada por:

$$\dot{x} = A_n x + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1}(A_i - A_n)\delta_i x + b_n + \sum_{i=1}^{n-1}(b_i - b_n)\delta_i, \; x \in \mathcal{B}_x, \, \delta \in \Delta, \tag{12}$$

onde $\mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^{n_x}$ é um politopo convexo, vizinhança da origem, que representa os valores de interesse da variável de estado $x(t)$ para fins de análise de estabilidade do sistema (12).
Considera-se também o politopo, determinado a partir de Δ, $\mathcal{B}_\delta = \mathbf{Co}(\boldsymbol{\Delta})$, cujos vértices são os elementos de Δ.
Introduz-se o seguinte vetor auxiliar $\pi \in \mathbb{R}^{n_\pi}$, onde $n_\pi = (n-1)n_x + n + 1$.

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_{n-1} & \pi_n & \pi_{n+1} & \cdots & \pi_{2n} \end{bmatrix}' \quad \text{com} \quad \begin{array}{rcl} \pi_i & = & \delta_i x \;, \;\; \forall i \in \mathcal{J}_{n-1} \\ \pi_n & = & 1 \\ \pi_{n+i} & = & \delta_i \;, \;\; \forall i \in \mathcal{J}_n \end{array} . \tag{13}$$

As relações $\pi_n = 1$ e $\pi_{n+i} = \delta_i$ são alternativamente representadas por $\pi_n x - x = 0$ e $\pi_{n+i} - \delta_i \pi_n = 0$, respectivamente.

[7] Detalhes a respeito dessa matriz se encontram no Lema 2.1 em Trofino [6].

Por simplicidade de notação, as relações entre x e o vetor auxiliar π, dados acima, são representadas numa forma mais compacta pela notação $(x,\pi) \in \mathcal{D}$ com $\mathcal{D}$ definido por

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,\pi) \; : \; \left[\begin{array}{cc} \Omega_1 & \Omega_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ \pi \end{array} \right] = 0 \right\} \tag{14}$$

Assim, o sistema (12) pode ser expresso como se segue:

$$\dot{x} \;=\; A_n x + \mathbf{A}\pi \;,\;\; x \in \mathcal{B}_x, \;\; (x,\pi) \in \mathcal{D}, \tag{15}$$

com $\mathbf{A} = [\; (A_1 - A_n) \;\; \cdots \;\; (A_{n-1} - A_n) \;\; b_n \;\; (b_1 - b_n) \;\; \cdots \;\; (b_{n-1} - b_n) \;\; 0_{n_x \times 1} \;]$.
Nesse caso, as matrizes $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{n_\Omega \times n_x}$ e $\Omega_2 \in \mathbb{R}^{n_\Omega \times n_\pi}$, que definem o conjunto $\mathcal{D}$, também são funções afins de $(x, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ representadas pelas relações dadas em (13). Nota-se que δ definida em (3) satisfaz $\delta\delta^{'} = diag(\delta_i)$, ou , de maneira equivalente:

$$\delta_i\delta_j = 0, \qquad \delta_i(\delta_i - 1) = 0 \;,\;\; \forall\, i \neq j \in \mathcal{J}_n. \tag{16}$$

De (13), (16) e expressando a variável de referência, δ_n, em termos de x e as componentes de π, surgem outro conjunto de identidades (veja na referência [1]) que podem ser incorporadas como novas linhas das matrizes Ω_1 e Ω_2 dadas em (14).

Notações auxiliares

A partir das funções ψ_{ik} dadas em (2) que definem as regras de chaveamento, constroem-se as matrizes ϕ_i, Φ:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{2n} E_i^{'}\phi_i E_i \;\; \text{com} \;\; \begin{cases} \phi_i = \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik}\psi_{ik}, \;\; R_{ik} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \;\;\; i = 1, \ldots, n \\ \\ \phi_i = \sum_{k=1}^{m_i} R_{ik}\psi_{(i-n)k}, \;\; R_{ik} \in \mathbb{R}, \;\;\; i = n+1, \ldots, 2n \end{cases} , \tag{17}$$

onde E_i são matrizes constantes e serão dadas logo a seguir; $R_{ik} > 0$ são variáveis de escalonamento a serem determinadas, que surgem após a aplicação do $\mathcal{S}$-*procedure* [9]. Sejam as matrizes constantes $\tilde{E}_i$ e $\tilde{E}_n$ tais que $\tilde{E}_i\pi = \pi_i$ $(i \neq n)$ e $\tilde{E}_n\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$. As matrizes E_i são dadas por:

$$\begin{array}{rcl} E_i &=& \left[\begin{array}{cccccc} 0_{n_x} & 0_{n_x \times n_1} & 0_{n_x \times n_2} & \cdots & 0_{n_x \times n_d} & \tilde{E}_i \end{array} \right], \text{ para } i = 1, \ldots, n-1, \\ E_n &=& \left[\begin{array}{cccccc} I_{n_x} & 0_{n_x \times n_1} & 0_{n_x \times n_2} & \cdots & 0_{n_x \times n_d} & -\tilde{E}_n \end{array} \right], \\ E_i &=& \left[\begin{array}{cccccc} 0_{1 \times n_x} & 0_{1 \times n_1} & 0_{1 \times n_2} & \cdots & 0_{1 \times n_d} & \tilde{E}_i \end{array} \right], \text{ para } i = n+1, \ldots, 2n. \end{array}$$

Para $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, consideram-se os vetores w_i da seguinte forma:

$$w_0 = x, \quad w_1 = \Theta_0 x, \quad w_2 = \Theta_1\Theta_0 x, \quad \cdots \quad w_d = \Theta_{d-1}\cdots\Theta_1\Theta_0 x.$$

Consideram-se as matrizes $\tilde{\Theta}_i(x)$ como se segue:

$$\tilde{\Theta}_i(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n_x} T_{ij} w_i r_j \quad \in \mathbb{R}^{n_{i+1} \times n_x} \quad i = 0, ..., d-1, \tag{18}$$

Considerando n_π, n_Ω, $m_a = \sum_{i=0}^{d} n_i$ e as matrizes $D \in \mathbb{R}^{m_a \times m_a}$, $F \in \mathbb{R}^{m_a \times (m_a + n_\pi)}$, $C \in \mathbb{R}^{(m_a - n_x) \times m_a}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{(m_a - 1) \times m_a}$, $\Omega \in \mathbb{R}^{(3m_a - n_x + n_\Omega + n_\pi - 1) \times (2m_a + n_\pi)}$, $N \in \mathbb{R}^{(m_a) \times (m_a + n_\pi)}$ dadas respectivamente por

$$D = \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -(\tilde{\Theta}_0(x) + \Theta_0(x)) & I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ -\tilde{\Theta}_1(x) & -\Theta_1(x) & I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\tilde{\Theta}_{d-1}(x) & 0 & \cdots & \Theta_{d-1}(x) & I_{n_d} \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} A_n & 0_{n_x \times n_1} & 0_{n_x \times n_2} & \cdots & 0_{n_x \times n_d} & \mathbf{A} \\ 0_{n_1 \times n_x} & & & \cdots & & 0_{n_1 \times n_\pi} \\ 0_{n_2 \times n_x} & & & \cdots & & 0_{n_2 \times n_\pi} \\ \vdots & & & \cdots & & \vdots \\ 0_{n_d \times n_x} & & & \cdots & & 0_{n_d \times n_\pi} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\Theta_0(x) & I_{n_1} & & \cdots & 0 \\ 0 & -\Theta_1 & I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & -\Theta_{d-1} & I_{n_d} \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} C & \\ C_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} -D & F \\ 0 & C \;\; 0 \\ 0 & C_{\pi_\Theta} \\ 0 & \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} I_{m_a} & 0 \end{bmatrix},$$

sendo $\pi_\Theta = \begin{bmatrix} x & \Theta(x)\,x & \pi \end{bmatrix}'$ e as matrizes C_x e C_{π_Θ} dadas em (8). Com as notações auxiliares colocadas acima, apresenta-se o resultado principal desta seção: estabilidade regional de sistemas chaveados e determinação do domínio de atração enunciado como um problema convexo, usando LMIs.

Teorema 4.1 *(Estabilidade regional $\mathcal{Q}_r$ do Sistema Chaveado Afim)*
Considere o sistema (1) com os supostos **A1**-**A5** *e seu respectivo sistema associado (12). Seja $\Theta(x)$, definida em (3), uma dada função matricial em x. Considerem-se as notações auxiliares (19) e (17).*
Se P, L, M, R_{ik} para $i = 1, \ldots, 2n$, $k = 1, \ldots, m_i$ resolvem o seguinte problema de otimização, onde as LMIs são construídas em todos os vértices do meta-politopo $\mathcal{B} = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta \times \mathcal{B}_w$:

$$\min \ \mathrm{tr}\ (P + L\Psi + \Psi' L')$$

sujeito à:

$$P = P',$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} a_l' & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_l \\ 0 \end{bmatrix} & (P + L\Psi + \Psi' L') \end{bmatrix} \geq 0, \ l = 1, \ldots, n_e, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & PN \\ N'P & 0 \end{bmatrix} + M\Omega + \Omega' M' + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

então, o sistema (1) é assintoticamente localmente estável e $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$, com $\mathcal{P}(x)$ como em (3), é uma função de Lyapunov para esse sistema. Também, a região Υ definida por (7) é *positivamente invariante, e, para qualquer $x(0) \in \Upsilon$, a trajetória $x(t) \in \Upsilon\ \forall t \geq 0$ e se aproxima da origem quando $t \to \infty$.*

Prova

Considere-se o sistema (12) e vetor π como em (13). Definem-se os seguintes vetores auxiliares:

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{bmatrix} x \\ \Theta\, x \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \pi, \tag{22}$$

onde $\xi_1 \in \mathbb{R}^{n_x+m_a}$, $\xi_2 \in \mathbb{R}^{n_\pi}$.
Sejam as matrizes $D_1 = \begin{bmatrix} I_{n_x} & 0_{n_x \times m_a} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times (n_x+m_a)}$ e $D_2 = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times (n_x+m_a)} & I_{n_x} & 0_{n_x \times (m_a+n_\pi)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times (2(n_x+m_a)+n_\pi)}$ tais que $D_1\,\xi_1 = x$ e $D_2\,\xi = x$.
Assume-se que as condições do Teorema 4.1 são satisfeitas.
Aplicando o complemento de Schur em (20) tem-se a LMI

$$P + L\Psi + \Psi' L' > 0. \tag{23}$$

Desde que as desigualdades (23) e (21) são estritas, então existem escalares positivos suficientemente pequenos, ϵ_1 e ϵ_2, tal que é possível acrescentar os termos $-\epsilon_1 D_1' D_1$ e $\epsilon_2 D_2' D_2$ nas relações (23) e (21), respectivamente. Ou seja, as seguintes condições são satisfeitas para todos os vértices do meta-politopo $\mathcal{B} = \mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta \times \mathcal{B}_w$.

$$P + L\Psi + \Psi' L' - \epsilon_1 D_1' D_1 \geq 0\ , \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & PN \\ N'P & 0 \end{bmatrix} + M\Omega + \Omega' M' + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} + \epsilon_2 D_2' D_2 \leq 0\ . \tag{25}$$

Por convexidade, as desigualdades (24) e (25) também são satisfeitas para todo $x \in \mathcal{B}_x$, $\delta \in \Delta$. Pré- e pós-multiplica-se a relação (24) por ξ_1' e por sua transposta, respectivamente, e a relação (25) por $\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}'$ e por sua transposta, respectivamente. Nota-se que, por construção, na primeira relação $C_x\, x = 0$ e $C\,\xi_1 = 0$[8], então $\Psi\,\xi_1 = 0$. Similarmente, na segunda relação, pela construção das matrizes D e F, $-D\dot{\xi}_1 + F\xi = 0$. Também, $\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \xi = 0$, $C_{\pi_\Theta}\xi = 0$ e, considerando que a notação $(x, \pi) \in \mathcal{D}$ representa o conjunto de igualdades (13), então $\begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_2 \end{bmatrix} \xi = 0$. Assim, $\Omega \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} = 0$.
Então, o seguinte é satisfeito:

$$\xi_1' P \xi_1 \geq \epsilon_1 x' x\ , \quad \forall\, \xi_1 : \Psi\xi_1 = 0 \text{ e } x\ \in\ \mathcal{B}_x \tag{26}$$

$$\dot{\xi}_1' P \xi_1 + \xi_1' P \dot{\xi}_1 + \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} \leq -\epsilon_2 x' x\ , \tag{27}$$

$$\forall\, \xi : \Omega \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} = 0,\ x \in \mathcal{B}_x \text{ e } \delta \in \Delta.$$

Também, $\xi_1' = \begin{bmatrix} x' & x'\Theta' \end{bmatrix}$ e, pela definição da função de Lyapunov candidata, a desigualdade (26) se torna

$$v(x) = \xi_1' P \xi_1 = x' \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta \end{bmatrix} x = x' \mathcal{P}(x)\, x \geq \epsilon_1 x' x\ , \quad \forall\, x \in \mathcal{B}_x\ . \tag{28}$$

[8] Aqui foi aplicada a condição $C_z z = 0$ e foi usada a definição do vetor auxiliar $\xi = \pi_\Theta$.

Desde que x pertence ao politopo $\mathcal{B}_x$, os elementos da matriz Ψ de (19) são limitados. Então, existe um escalar positivo suficientemente grande, ϵ_3, tal que $\epsilon_3 I_{n_x} \geq (P + L\Psi + \Psi' L')$. Isto é, $\epsilon_3 \xi_1^{'} \xi_1 = \epsilon_3(x'x + x'\Theta^{'}\Theta x) \geq \xi_1^{'} P \xi_1 = x'\mathcal{P}(x)x$.
Também, como x pertence a $\mathcal{B}_x$, existe outro escalar positivo suficientemente grande, ϵ_4, tal que $\epsilon_4 I_{n_x} \geq \Theta^{'}\Theta$. Assim, $x'\mathcal{P}(x)x \leq \epsilon_3(1+\epsilon_4)x'x$, e, com a relação (28):

$$\epsilon_1 x'x \leq v(x) = x'\mathcal{P}x \leq \epsilon_3(1+\epsilon_4)x'x \ , \quad \forall\, x \in \mathcal{B}_x. \tag{29}$$

De (17) e considerando a variável de referência $\delta_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i$, obtém-se

$$\xi'\Phi\xi = \textstyle\sum_{i=1}^{2n}(E_i\xi)^{'}\phi_i(E_i\xi), \text{ onde } E_i\xi = \begin{cases} \pi_i, & i \neq n \\ \delta_n x, & i = n \end{cases} .$$

Então, pode-se reescrever o último termo da desigualdade (27), como se segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i^{'}\phi_i\pi_i + (\delta_n x)'\phi_n(\delta_n x) + \sum_{i=1}^{n} \pi_{n+i}^{'}\phi_{n+i}\pi_{n+i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(\delta_i^2 x'\phi_i x + \delta_i^2\phi_{n+i}) + \delta_n^2 x'\phi_n x + \delta_n^2\phi_{2n}. \end{aligned}$$

Considerando as definições de X_i, $\delta \in \Delta$ e (17), têm-se que $\phi_i \geq 0$ e que $x'\phi_i x \geq 0, \forall i$; assim, conclui-se o seguinte:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} \geq 0 \ , \quad \forall\, x \in \mathcal{B}_x \ , \quad \delta \in \Delta.$$

Com isso, a desigualdade (27) implica:

$$\dot{\xi}_1{}' P\xi_1 + \xi_1^{'} P\dot{\xi}_1 \leq -\epsilon_2 x'x \ , \quad \forall x \in \mathcal{B}_x \ , \quad \delta \in \Delta \ ; \tag{30}$$

além disso,

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{d}{dt}(\begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix} x) \\ &= \begin{bmatrix} 0_{n_x} \\ \dot{\Theta}(x) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix} \dot{x}. \end{aligned} \tag{31}$$

Então, ao substituir (31) e ξ_1 em (30), obtém-se

$$\dot{v}(x) = \dot{x}'\mathcal{P}(x)x + x'\dot{\mathcal{P}}(x)x + x'\mathcal{P}(x)\dot{x} \tag{32}$$

Da referência Khalil [8] e das relações (29) e (32), conclui-se que a origem do sistema (12) é localmente e assintoticamente estável. Assim, $v(x) = x'\mathcal{P}(x)x$ é uma função de Lyapunov para o sistema (1).
Por último, pré- e pós-multiplicando (20) por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix} \end{bmatrix}'$$

e sua transposta, respectivamente, consegue-se (7). Da referência Boyd et al. [7], (7) implica $\Upsilon \subset \mathcal{B}_x$. Assim, Υ é um conjunto invariante, e, para todo $x(0) \in \Upsilon$, a trajetória $x(t) \in \Upsilon\ \forall t \geq 0$ se aproxima da origem do sistema quando $t \to \infty$.

$\square$

Nota

Note da prova do Teorema 4.1 que a LMI (21) está associada à $\dot{v}(x) = -\epsilon_3 x'x$(a segunda condição na definição de estabilidade $\mathcal{Q}_r$) e ainda a matriz M aparece na expressão como variável de escalonamento através da aplicação do Lema de Finsler associado à condição $\Omega \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi \end{bmatrix} = 0$. A LMI (20) está associada à condição $\Gamma \subset \mathcal{B}_x$ e também implica $\epsilon_1 x'x \leq v(x) \leq \epsilon_3(1+\epsilon_4)x'x$ (a primeira condição na definição de estabilidade $\mathcal{Q}_r$). A variável L é uma matriz de escalonamento oriunda da aplicação do Lema de Finsler[9] à condição $\Psi\xi_1 = 0$. Já as variáveis R_{ik} são matrizes de escalonamento oriundas da aplicação do S-procedure [9] nas condições ψ_{ik} em (2) que definem as regiões X_i.

5 Resultados Numéricos

O exemplo seguinte, encontrado em Ponce et al. [10], ilustra o potencial dessa metodologia. Nele, apresentam-se os domínios de atração do sistema quando usados os conceitos de estabilidade $\mathcal{Q}_r$, para $r = 2$ e $r = 4$.

Exemplo 5.1 *(Domínio de Atração do Pêndulo Invertido)*
Considere-se o problema do pêndulo rotatório invertido dado pelo sistema com saturação:

$$\dot{x} = Ax + b\,\mathsf{sat}(K'x) \tag{33}$$

Nesse caso,
$n_x = 2$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $\mathsf{sat}(u)$ *é a função de saturação normalizada dada por* $\mathsf{sat}(u) = \begin{cases} -1 & u < -1 \\ u \quad se & |u| \leq 1 \\ 1 & u > 1 \end{cases}$ $, u = K'x \in R.$
O sistema (33) é reescrito como um sistema afim chaveado ($n = 3$ e $\mathcal{J}_3 = \{1, 2, 3\}$):

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax - b & x \in X_1 = \{x : K'x < -1\} \\ (A + bK')x & x \in X_2 = \{x : K'x \leq 1\} \\ Ax + b & x \in X_3 = \{x : K'x > 1\} \end{cases}$$

e as funções que descrevem os chaveamentos são dadas por

$$\begin{array}{l} \psi_1 = -1 - K'x \ \ \textit{para o conjunto } X_1 \\ \psi_{21} = 1 - K'x, \ \ \psi_{22} = 1 + K'x \ \ \textit{para o conjunto } X_2 \\ \psi_3 = -1 + K'x \ \ \textit{para o conjunto } X_3 \end{array}$$

Assim, o sistema associado é dado por:

$$\dot{x} \ = \ A_3 x + \textstyle\sum_{i=1}^{2}(A_i - A_3)\delta_i x \ + \ b_3 + \textstyle\sum_{i=1}^{2}(b_i - b_3)\delta_i, \ x \in \mathcal{B}_x, \ \delta \in \ \Delta,$$

com $A_1 = A_3 = A$, $A_2 = A + bK'$, $-b_1 = b_3 = b$, $b_2 = 0$,

[9] Veja no Apêndice.

e

$$\Delta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para $\beta = 1$, o politopo $\mathcal{B}_x$ é dado pelos vértices

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0.2\beta \\ -1.2\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.5\beta \\ -1.2\beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\beta \\ \beta \end{bmatrix} \right\},$$

e o politopo $\mathcal{B}_\delta = \mathbf{Co}(\Delta)$. Com isso, o politopo $\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_\delta$ possui 12 vértices.
A matriz $\Theta(x)$ é obtida usando (2) nos casos $d = 1$ e $d = 2$, isto é, $r = 2$ e $r = 4$ para as abordagens $\mathcal{Q}_2$ e $\mathcal{Q}_4$, respectivamente. Foram consideradas as matrizes afins

$$\Theta_0(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_2 \\ x_2 I_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \Theta_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 I_2 & x_2 I_2 \end{bmatrix}.$$

Também,

$$\tilde{\Theta}_0(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

e

$$w = \Theta_0(x) x = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}.$$

A estrutura para a função de Lyapunov é dada por

$$v(x) = x' \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix}' P \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ \Theta(x) \end{bmatrix} x$$

considerando $\Theta(x)$ como em (2).
Satisfeitas as condições do Teorema 4.1, as Figuras 1 e 2 ilustram o domínio de atração desse sistema. Na primeira figura as regiões Υ_{Q_2} e Υ_{biq} mostram a semelhança dos resultados da abordagem $\mathcal{Q}_2$ e biquadrática, respectivamente.
Com a mesma estrutura para a função de Lyapunov, observa-se que o Teorema 4.1 e o Teorema 1 em [1] levarão a obtenção de uma matriz P diferente e da mesma ordem[10], em cada caso. Dessa forma, neste exemplo, a matriz P de ordem 6 obtida na abordagem biquadrática é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 2.7589113 & 1.2054263 & .0480816 & 3921628.4 & -5864053.5 & -3061.6053 \\ 1.2054263 & 1.4752537 & 1942425.5 & 340028.22 & -336966.28 & .0235615 \\ 0.0480816 & 1942425.5 & 1.0102991 & -5418500.3 & 5418500.9 & -0.0860142 \\ 3921628.4 & 340028.22 & -5418500.3 & 1. & 3081301.8 & 3326153.2 \\ -5864053.5 & -336966.28 & 5418500.9 & 3081301.8 & -6162604.1 & -3326153.5 \\ -3061.6053 & 0.0235615 & -0.0860142 & 3326153.2 & -3326153.5 & 0.0605885 \end{bmatrix}$$

Na abordagem $\mathcal{Q}_2$ obtéve-se a seguinte matriz

$$P = \begin{bmatrix} 2.5148064 & 1.356162 & 0 & -87236.871 & -2084740.1 & 4808464.9 \\ 1.356162 & 1.5140795 & 2171977. & -2938178. & -1870286.9 & 3.130E-09 \\ 0 & 2171977 & 0.2257827 & -395041.83 & 395041.83 & 1.754E-09 \\ -87236.871 & -2938178. & -395041.83 & -2106402.1 & 66144.492 & 1843849.5 \\ -2084740.1 & -1870286.9 & 395041.83 & 66144.492 & 1974113.5 & -1843849.5 \\ 4808464.9 & 3.130E-09 & 1.754E-09 & 1843849.5 & -1843849.5 & 0.2257827 \end{bmatrix}$$

[10]Neste caso $\Theta(x) = \Theta_0(x)$

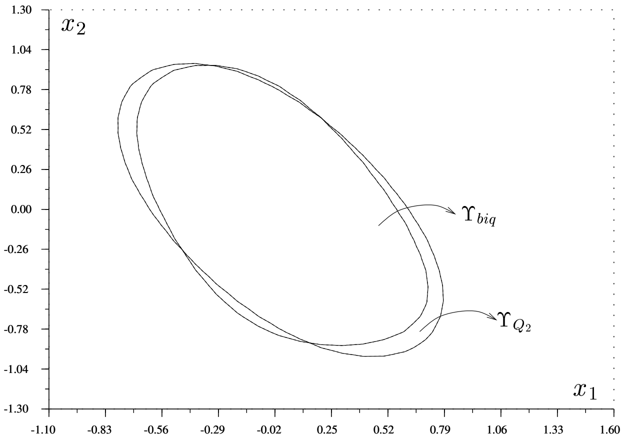

Figura 1: Estabilidade $\mathcal{Q}_2$ e estabilidade biquadrática para o pêndulo invertido.

Já o resultado quando $r = 4$ é dado na Figura 2 pela região Υ_{Q_4} (obtida na abordagem $\mathcal{Q}_4$). Nesta figura, pode-se observar uma região maior quando comparada com aquela obtida em Υ_{Q_2} onde foi usada a estabilidade $\mathcal{Q}_2$. Neste caso, obteve-se a seguinte matriz P (de ordem 8)

$$P = \begin{bmatrix} 2.2690257 & 1.2531693 & -4.283E-08 & 10729224. & -7.785E-08 & 2710531.6 & 1293565.7 & 5417604.7 \\ 1.2531693 & 1.3865652 & -10729224. & -1912537.9 & -797993.72 & 3.325E-07 & -21767451 & 387116 \\ -4.283E-08 & -10729224. & -2587131.4 & 0. & 16349846. & 7.861E-08 & 5.805E-07 & -5.985E-07 \\ 10729224. & -1912537.9 & 0. & -3361363.4 & 0. & 16349846. & -5.899E-07 & 0. \\ -7.785E-08 & -797993.72 & 16349846 & 0. & 0.0000037 & 0. & -2.807E-07 & 4.890E-07 \\ 2710531.6 & 3.325E-07 & 7.861E-08 & 16349846. & 0. & -774232. & -2.371E-07 & -2.444E-07 \\ 1293565.7 & -21767451. & 5.805E-07 & -5.899E-07 & -2.807E-07 & -2.371E-07 & 0.0000043 & -8.492E-07 \\ 5417604.7 & 387116. & -5.985E-07 & 0. & 4.890E-07 & -2.444E-07 & -8.492E-07 & 0.0000042 \end{bmatrix}.$$

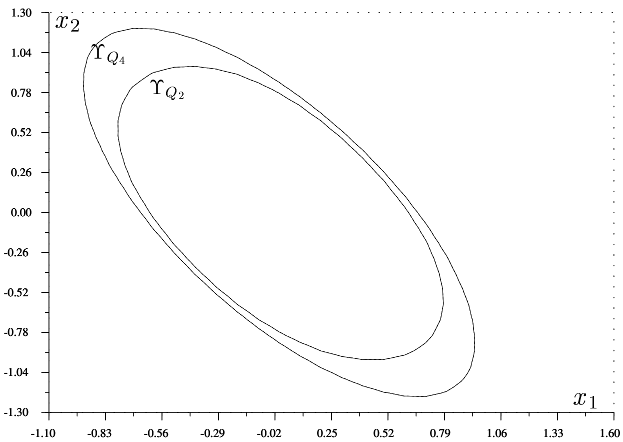

Figura 2: Estabilidade $\mathcal{Q}_4$ e $\mathcal{Q}_2$ para o pêndulo invertido.

Dado o politopo $\mathcal{B}_x$ definido pelo seus vértices (com $\beta > 0$) e usando a ferramenta LMI do software SCILAB, o domínio de atração ($\Gamma \subset \mathcal{B}_x$) é obtido resolvendo o problema de otimização convexa seguindo as condições do Teorema 4.1 para cada valor de β fornecido. A região Γ é

otimizada quando o valor de β seja o máximo possível, realizando assim um processo iterativo. Essa região será maior quanto maior for o número de vértices do politopo, entretanto haverá um maior esforço computacional no processamento dos programas.
Outros exemplos de sistemas com saturação foram testados mostrando resultados menos conservadores na abordagem $\mathcal{Q}_r$. Se $r = 2$ os resultados são comparáveis a abordagem biquadrática. Já se $r > 2$, as regiões são maiores em muitos dos casos estudados.

6 Conclusões

Neste trabalho é apresentado o conceito de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ para análise de sistemas chaveados. Para fazer a análise regional e estimar o domínio de atração desses sistemas, é usada uma função de Lyapunov de tipo polinomial, $v(x) = x^{'}\mathcal{P}(x)x$, comum a todos os subsistemas do sistema chaveado e independente das partições do estado, onde a matriz $\mathcal{P}(x)$ é obtida resolvendo um problema de otimização usando LMIs.
O fato de se trabalhar com uma função de Lyapunov comum e polinomial diferencia a metodologia aqui apresentada de outras metodologias [2, 3] que são convenientes para a análise global desses sistemas e utilizam funções de Lyapunov quadráticas diferentes para cada subsistema, porém muito restritivas para a determinação de domínios de atração.
A eficácia do conceito de estabilidade $\mathcal{Q}_r$ é mostrada nos gráficos do exemplo trabalhado, mostrando ser uma abordagem promissora que fornece resultados menos conservadores. Quanto maior é a ordem da função de Lyapunov, maior será a região de estabilidade obtida.
Quando $r = 2$ a estrutura da função de Lyapunov é similar que na abordagem biquadrática, porém, a matriz P obtida nas condições do Teorema 4.1 será diferente e com isto se obterá uma região de estabilidade diferente (e com áreas similares).
A metodologia apresentada é muito apropriada para obter estimativas de regiões de atração limitadas. Estudos posteriores abordarão o problema de estimar domínios de atração ilimitados de sistemas chaveados com esse enfoque.

7 Apêndice

Para maior compreensão deste artigo, nesta seção serão fornecidos alguns conceitos que foram usados durante o seu desenvolvimento.

Complemento de Schur

Um conjunto de inequações não lineares pode ser colocado na forma LMI através do Complemento de Schur. Pelo interesse contido no texto, será enunciado somente o caso de desigualdades estritas. O caso não estrito se encontra em Boyde et al. [7].

Lema 7.1 *(Complemento de Schur)*
Sejam Q, R, S matrizes de dimensões apropriadas tais que Q, R são simétricas.
As seguintes condições são equivalentes:

a) $\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} > 0$

b) $R > 0$ *e* $Q - SR^{-1}S' > 0$.

Lema de Finsler

O Lema de Finsler [11, 7] é bastante utilizado na eliminação de variáveis em inequações matriciais. A seguir enunciam-se particularidades deste lema.

Lema 7.2 *(LC-Scaling)*
Dados uma matriz simétrica P e uma matriz C de dimensões apropriadas. Seja X uma matriz tal que $CX = 0$.
Então, tem-se que

$$X'PX > 0 \tag{34}$$

se e somente se existe L tal que

$$P + LC + C'L' > 0. \tag{35}$$

Se as matrizes P e C são incertas, então a condição (35) é apenas suficiente.

S-Procedure

O S-procedure é empregado para se obterem formulações LMI para problemas do tipo

$$v_1(x) > 0 \;\; \forall x \quad : v_2(x) > 0$$

com v_1, v_2 duas funções quadráticas em x.
A seguir apresentamos alguns resultados importantes. Mais detalhes são encontrados em Boyde [7] e nas referências nele apresentadas.

S-procedure para inequações não estritas

Sejam $F_0, \ldots, F_p$ funções quadráticas da variável $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$F_i(\xi) \triangleq \xi' T_i \xi + 2u_i'\xi + v_i, \quad i = 0, \ldots, p, \tag{36}$$

onde $T_i = T_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $u_i \in \mathbb{R}^n$ e escalares $v_i \in R$.
Considere as seguintes restrições sobre F_0:

$$F_0(\xi) \geq 0 \;\; \forall\, \xi \quad : \;\; F_i(\xi) \geq 0 \;\; i = 1, \ldots, p. \tag{37}$$

Essa restrição será satisfeita se existirem escalares $\tau_1 \geq 0, \ldots, \tau_p \geq 0$ tais que, para todo ξ,

$$F_0(\xi) - \sum_{i=1}^{p} \tau_i F_i(\xi) \geq 0. \tag{38}$$

Note que (38) é uma condição suficiente para (37), que pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} T_0 & u_0 \\ u_0' & v_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{p} \tau_i \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i' & v_i \end{bmatrix} \geq 0. \tag{39}$$

No caso particular de $p = 1$, a condição de necessidade é obtida, isto é, (37) também implica (38).

S-procedure para inequações estritas

Sejam $T_0, \ldots, T_p$ matrizes simétricas de ordem $n \times n$. Para $\xi \in \mathbb{R}^n$, consideremos as seguintes condições sobre T_0:

$$\xi' T_0 \xi > 0 \quad \forall\ \xi \neq 0 \quad : \ \xi' T_i \xi > 0 \quad i = 1, \ldots, p. \tag{40}$$

$\xi' T_0 \xi > 0$ será satisfeita se existirem escalares $\tau_1 \geq 0, \ldots, \tau_p \geq 0$ tal que

$$T_0 - \sum_{i=1}^{p} \tau_i T_i > 0. \tag{41}$$

Para o caso de $p = 1$, a condição de necessidade é obtida e (40) garante (41). Note que (41), (39) e (38) são LMIs nas variáveis $\tau_1, \ldots, \tau_p$.

Função de classe $\mathcal{K}$

Uma função de classe $\mathcal{K}$ [8] é uma função real de variável real $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que satisfaz as seguintes condições:

- α é contínua;
- α se anula na origem: $\alpha(0) = 0$;
- é uma função positiva: $\alpha(s) > 0$ se $s > 0$;
- é uma função injetiva: $\alpha(s_1) \leq \alpha(s_2)$ se $s_1 < s_2$.

Referências

[1] S. Palomino Bean, D. Coutinho, A. Trofino, and J. E. R. Cury, "Stability Analysis and Guaranteed Domain of Attraction for a class of Hybrid Systems: an LMI Approach," *Int. Journ. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 13, no. 5, pp. 465–481, 2003.

[2] M. Johansson, *Piecewise Linear Control Systems.* Lund, Sweden: Ph.D. thesis, Lund Institute of Technology, 1999.

[3] S. Pettersson and B. Lennartson, "Exponential estability of hybrid systems using piecewise quadratic lyapunov functions resulting in an lmi problem," in *Proc. of the 14th IFAC*, (Beijing, China), 1999.

[4] S. Palomino, D. Coutinho, A. Trofino, and J. E. R. Cury, "Computation of stability regions using lmis for dynamical systems with saturation," in *IX International Symposium on Dynamics Problems on Mechanics, IX DINAME*, (Florianópolis, SC), pp. 21–26, 2001.

[5] A. Trofino and C. E. de Souza, "Biquadratic stability of uncertain linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46(8), pp. 1303–1307, 2001.

[6] A. Trofino, "Robust Stability and domain of attraction of uncertain Nonlinear Systems," in *Proc. of the American Control Conference*, (Chicago), 2000.

[7] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in systems and control theory.* Philadelphia: SIAM Books, 1994.

[8] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems.* New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

[9] V. A. Yakubovich, "$\mathcal{S}$-procedure in Nonlinear Control Theory," *Vestnik Leninggradskogo Universiteta, Ser. Matematika*, pp. 62–77, 1971.

[10] E. Ponce, D. Pagano, and J. Aracil, "Bifurcaciones en un Péndulo Invertido Controlado por Realimentaciómn de Estados," in *Proc. of the XIII Automation Brazilian Congress*, (Florianópolis, Brazil), 2000.

[11] P. Finsler, "Über das Vorkmmen definiter and semi-definiter Formen in Scharen quadratischer Formen," *Comentarii Mathematici Helvetici*, vol. 9, pp. 188–192, 1937.