

**Ein Iterationsverfahren für elliptische
Cauchy–Probleme und die Verknüpfung mit der
Backus–Gilbert Methode**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe–Universität
in Frankfurt am Main

von
Antonio C. G. Leitão
aus Niteroi, Brasilien

Frankfurt am Main 1996

von Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe–Universität
als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. H.F. de Groote

1. Gutachter: Prof. Dr. J. Baumeister

2. Gutachter: Priv. Doz. Dr. F. Penzel

Datum der Disputation: 15. Januar 1997

Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes.

Brena und Nicolas

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. J. Baumeister, der dieser Arbeit betreute, ganz herzlich bedanken. Er stand mit Geduld jederzeit als Ansprechpartner zur Verfügung, und aus vielen persönlichen Gesprächen zog ich großen Gewinn.

Dank sagen möchte ich auch Dr. Frank Penzel und meinem Kollegen Sascha Meyer für viele fruchtbare Diskussionen, dem Kollegen Georg Steffens für das Korrekturlesen der gesamten Arbeit, sowie meiner DAAD-Referentin Frau Helga Wahre für die Empfehlungen und die Hilfe, die meinen Aufenthalt in Deutschland enorm erleichterten.

Nicht vergessen will ich, die Unterstützung meiner Frau Brena Fernandez zu erwähnen, die mich die ganze Zeit ermutigte und immer auf meiner Seite stand. Ohne sie wäre diese Arbeit sicher nicht entstanden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ziele der Arbeit	1
1.2	Entwicklung der Theorie	4
1.2.1	Kurze historische Übersicht	4
1.2.2	Hauptresultate der Dissertation	5
1.3	Übersicht über die Dissertation	6
2	Das Cauchy–Problem	8
2.1	Die Kreisringgeometrie	9
2.2	Die Rechteckgeometrie	12
2.3	Wieder die Kreisringgeometrie	13
2.4	Lösungstheorie	15
3	Das Iterationsverfahren	21
3.1	Beschreibung des Verfahrens	21
3.1.1	Allgemeine Formulierung	21
3.1.2	Das Verfahren in der Rechteckgeometrie	25
3.1.3	Das Verfahren für die Kreisringgeometrie	28
3.2	Analyse des Verfahrens	30
3.2.1	Die Konvergenz	30
3.2.2	Konvergenzgeschwindigkeit	36
3.2.3	Regularisierung	39
4	Die Backus-Gilbert–Methode	48

4.1	Die ursprüngliche Formulierung	48
4.2	Die funktionalanalytische Formulierung	50
4.3	Anwendungen	55
4.3.1	Das Momentenproblem	55
4.3.2	Das Cauchy–Problem	57
5	Numerische Ergebnisse	61
5.1	Das nichtlineare Momentenproblem	61
5.2	Das Cauchy–Problem	65
A	Funktionen–Räume	74
A.1	Die Räume $C^k(\Omega)$	74
A.2	Die Sobolev–Räume $H^s(\Omega)$	75
A.3	Die Sobolev–Räume $H^s(\partial\Omega)$	79
B	Gemischte Randwertaufgaben	81
B.1	Spursätze	81
B.2	Die Greensche Formel	84
B.3	Gemischte Probleme	86
	Literaturverzeichnis	90
	Stichwortverzeichnis	94

Zusammenfassung

Die Hauptziele dieser Arbeit sind:

- Analyse eines Iterationsverfahrens, das eine Approximation für die Lösung des Cauchy–Problems für die Laplace–Gleichung in zweidimensionalen Gebieten liefert;
- Verknüpfung der Backus–Gilbert Methode mit diesem Verfahren, um eine gewisse Art von Informationen über die Lösung des Cauchy–Problems zu gewinnen;
- Diskretisierung des Verfahrens und numerische Tests.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes beschränktes zusammenhängendes Gebiet. Als ein elliptisches Cauchy–Problem auf Ω bezeichnet man eine Anfangswertaufgabe für einen elliptischen Differentialoperator auf dem Gebiet Ω , deren Anfangsdaten auf einer Mannigfaltigkeit $\Gamma \subset \partial\Omega$ gegeben sind. Die von uns untersuchte Aufgabe besteht darin, die Spur der Lösung einer solchen Anfangswertaufgabe auf dem Teil des Randes, wo die Randdaten nicht vorgeschrieben sind, nämlich auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$, herauszufinden. Als Lösung eines Cauchy–Problems betrachten wir hier eine Distribution in $H^1(\Omega)$, die der schwachen Formulierung der Laplacegleichung in Ω genügt und die Cauchydaten auf Γ im Sinne des Spuroperators erfüllt. Es ist bekannt, daß solche Cauchy–Probleme schlecht gestellt im Sinne von Hadamard sind.

Eine Methode, mit der diese Problemstellung behandelt werden kann, ist ein iteratives Verfahren, das erstmals von Maz'ya und Kozlov[Ma] benutzt wurde. Die Idee, die dem Verfahren zu Grunde liegt, kann folgendermaßen zusammengefaßt werden: Auf dem Randstück, auf dem man die Daten nicht kennt, wird irgendeine Anfangsnäherung vorgeschrieben. Diese wird sukzessive verbessert, indem man eine Reihe von korrektgestellten gemischten Problemen löst, die auf Γ die gegebenen Daten des Cauchy–Problems nutzen und auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$ die Iterationen der Anfangsnäherung. Die gegebenen Cauchydaten (Dirichlet– und Neumann–daten) werden beide benutzt, denn in der Iteration werden zwei Typen von gemischten Problemen gelöst. Der erste Typ hat als Randdaten die genauen Dirichletdaten auf Γ und die iterierten Neumann–daten auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$ und der zweite Typ die genauen Neumann–daten auf Γ und die iterierten Dirichletdaten auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Ein Iterationsschritt besteht aus der Kopplung zwischen zwei solchen gemischten Problemen.

Diese Art von Iteration läßt sich in den passenden Sobolev–Räumen als Potenzen eines affinen Operators T darstellen, dessen linearer Anteil T_l nichtexpansiv ist (d.h. $\|T_l\| \leq 1$). Diese Eigenschaft wird von uns benutzt, um die Konvergenz des Iterationsverfahrens mit Sätzen der Funktionalanalysis zu beweisen. Dann wird die Lösung des Cauchy–Problems als eine Lösung einer Fixpunktgleichung des Typs

$$T\varphi = \varphi.$$

betrachtet und studiert.

Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens sind möglich, wenn man a priori Kenntnisse über die Eigenwerte von T_l besitzt. Für bestimmte Gebiete, kann das

Definitionsgebiet von T so gewählt werden, daß man über die Spektraldarstellung von T_l verfügt. In solchen Fällen kann man die Selbstadjungiertheit von T_l und die Kompaktheit von $(I - T_l)$ beweisen und nutzen. Der Grad der Schlechtgestellttheit der Cauchy-Probleme in verschiedenen Gebieten kann verglichen werden, wenn wir uns die Eigenwerte von T_l anschauen. Es läßt sich schließen, das dieser Grad sowohl von dem Gebiet als auch von dem Randstück $\Gamma \subset \partial\Omega$, auf dem die Daten vorgegeben werden, abhängt.

Eine Alternative, um Informationen über die Lösung eines Cauchy-Problems zu bekommen, ist die Anwendung der Backus-Gilbert Methode. Die Aufgabe, eine Lösung für ein Cauchy-Problem zu finden, ist immer äquivalent dazu, eine lineare Gleichung des Typs

$$A\varphi = g$$

zu lösen (siehe Kapitel 4), wobei der Operator A aus der Verknüpfung von einer Randwertaufgabe mit einem Spuroperator besteht. Ist dann ein lineares Funktional μ auf $D(A)$ (das Definitionsgebiet von A) gegeben, erlaubt uns die Backus-Gilbert Methode das Moment

$$\langle \mu, \varphi \rangle$$

der Lösung φ zu berechnen, indem man die adjungierte Gleichung

$$A^*\psi = \mu$$

löst und die gewünschte Information durch

$$\begin{aligned} \langle \mu, \varphi \rangle &= \langle A^*\psi, \varphi \rangle \\ &= \langle \psi, A\varphi \rangle \\ &= \langle \psi, g \rangle \end{aligned}$$

ableitet. Das Verfahren ist besonders vorteilhaft, wenn die zum Punkt $P \in \partial\Omega \setminus \Gamma$ gehörende Dirac-Distribution $\delta(P - \cdot)$ zu $Rg(A^*)$ gehört. Ansonsten liefert diese Methode nur Informationen über φ , die man mit Hilfe von bestimmten Elementen aus $D(A)'$ (die sogenannten Glättungsfunktionale oder Sentinels) gewinnen kann.

Die adjungierte Gleichung $A^*\psi = \mu$ zu lösen, ist äquivalent dazu, die Lösung eines bestimmten Cauchy-Problems zu finden. Dieses Problem wird mit Hilfe des Iterationsverfahrens untersucht. Dies ist genau die Verknüpfung von dem Iterationsverfahren mit der Backus-Gilbert Methode.

Die Beschränkung auf den Laplace-Operator ist kein schwerwiegender Verlust an Allgemeinheit, Cauchy-Probleme für einen allgemeinen elliptischen Operator P mit C^∞ -Koeffizienten können behandelt werden, genauso wie es hier für den Laplace-Operator beschrieben wird. Die Ergebnisse in Anhang B lassen sich wieder formulieren wenn man den Raum $H^1(\Omega; \Delta)$ durch $H^1(\Omega; P)$ ersetzt.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Ziele der Arbeit

Die Hauptziele dieser Arbeit sind: Analyse eines Iterationsverfahrens, das eine Approximation für die Lösung des Cauchy-Problems für die Laplace-Gleichung in zweidimensionalen Gebieten liefert; Verknüpfung der Backus-Gilbert Methode mit diesem Verfahren, um eine gewisse Art von Informationen über die Lösung des Cauchy-Problems zu gewinnen; Diskretisierung des Verfahrens und numerische Tests.

Die Beschränkung auf den Laplace-Operator ist kein schwerwiegender Verlust an Allgemeinheit, Cauchy-Probleme für einen allgemeinen elliptischen Operator P mit C^∞ -Koeffizienten können behandelt werden, genauso wie es hier für den Laplace-Operator beschrieben wird. Die Ergebnisse in Anhang B lassen sich wieder formulieren wenn man den Raum $H^1(\Omega; \Delta)$ durch $H^1(\Omega; P)$ ersetzt. Details über die neue Formulierung der Green'schen Formel sowie über die Untersuchung von gemischten Problemen sind in [DaLi] Kap. 7 und [Gri1] Kap. 1 zu finden.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes beschränktes zusammenhängendes Gebiet. Als ein elliptisches Cauchy-Problem auf Ω bezeichnet man eine Anfangswertaufgabe für einen elliptischen Differentialoperator auf dem Gebiet Ω , deren Anfangsdaten auf einer Mannigfaltigkeit $\Gamma \subset \partial\Omega$ gegeben sind. Die von uns untersuchte Aufgabe besteht darin, die Spur der Lösung einer solchen Anfangswertaufgabe auf dem Teil des Randes, wo die Randdaten nicht vorgeschrieben sind, nämlich auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$, herauszufinden. (Als Lösung eines Cauchy-Problems betrachten wir eine Distribution in $H^1(\Omega)$, die der schwachen Formulierung der Laplacegleichung in Ω genügt und die Cauchydaten auf Γ im Sinne des Spuroperators erfüllt.)

Es ist bekannt, daß solche Cauchy-Probleme schlecht gestellt sind. Nach der Definition von Hadamard (1866–1963) heißt eine Anfangs- oder Randwertaufgabe korrekt gestellt, wenn sie die drei folgenden Eigenschaften aufweist: Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, sowie deren stetige Abhängigkeit von den Daten. Das Schlechtgestelltheitskonzept hängt natürlich sowohl von dem Lösungsbegriff als auch von den gewählten Topologien auf der

Menge der Daten und der Menge der Lösungen ab. Das folgende Beispiel stammt von Hadamard selbst [Had] und zeigt, daß die Lösung eines Cauchy-Problems im allgemeinen nicht stetig von den Anfangsdaten abhängt.

Betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0 & , (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u_k(x, 0) = 0 & , x \in (0, 1) \\ \frac{\partial}{\partial y} u_k(x, 0) = \varphi_k(x) & , x \in (0, 1) \end{cases}$$

wobei $\varphi_k = (\pi k)^{-1} \sin(\pi k x)$ ist. Die Lösungen

$$u_k(x, y) = (\pi k)^{-2} \sinh(\pi k y) \sin(\pi k x)$$

existieren für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und sind sogar eindeutig bestimmt (siehe Kapitel 2). Man stellt sofort fest, daß die Folge $\{\varphi_k\}$ gleichmäßig gegen Null konvergiert. Für $k \rightarrow \infty$ haben wir ein Cauchy-Problem mit homogenen Daten, dessen Lösung verschwindet. Aber für beliebig kleines $y > 0$ oszillieren die entsprechenden u_k immer stärker und nehmen beliebig große Werte an. Deswegen konvergieren die u_k in keiner vernünftigen Topologie gegen die Nulllösung des Limesproblems.

Dieses Beispiel lehrt uns noch mehr über die Natur der Cauchy-Probleme. Obwohl die Differentialgleichungstheorie mehrere Aussagen über die Eindeutigkeit der Lösung solcher Anfangswertaufgaben liefert, ist die Existenz einer Lösung eine sehr schwierig zu beantwortende Frage. Um dies festzustellen, schreiben wir das obige Problem folgendermaßen um:

$$(CP) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & , (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, 0) = f(x) & , x \in (0, 1) \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = g(x) & , x \in (0, 1) \end{cases} .$$

Unsere Aussage lautet: Sogar für C^∞ -Daten f und g ist dieses Cauchy-Problem im allgemeinen nicht lösbar. Setzen wir dafür $f \equiv 0$. Eine Lösung u von (CP) ist, unter dieser Voraussetzung reell analytisch (das folgt aus der Greenschen Darstellungsformel für die Laplacegleichung) und kann durch Null auf $(0, 1) \times [0, 1)$ stetig fortgesetzt werden. Die Fortsetzung

$$\tilde{u}(x, y) = \begin{cases} u(x, y) & , y \in [0, 1) \\ u(x, -y) & , y \in (0, -1) \end{cases}$$

ist reell analytisch in $(0, 1) \times (-1, 1)$ wegen des Schwarzschen Spiegelungsprinzips. Es ist daher klar, daß das Cauchy-Problem nur lösbar sein kann, falls die Funktion g reell analytisch ist.

Eine Methode, mit der diese Problemstellung behandelt werden kann, ist ein iteratives Verfahren, das erstmals von Maz'ya und Kozlov [Ma] benutzt wurde. Die Idee, die dem Verfahren zu Grunde liegt, kann folgendermaßen zusammengefaßt werden: Auf dem Randstück, auf dem man die Daten nicht kennt, wird irgendeine Anfangsnäherung vorgeschrieben. Diese wird sukzessive verbessert, indem man eine Reihe von korrektgestellten gemischten Problemen löst, die auf Γ die gegebenen Daten des Cauchy-Problems nutzen und auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$ die Iterationen der Anfangsnäherung. Die gegebenen Cauchydaten (Dirichlet- und Neumann-daten) werden beide benutzt, denn in der Iteration werden zwei Typen von gemischten Problemen gelöst. Der erste Typ hat als Randdaten die genauen Dirichletdaten auf Γ und die iterierten Neumann-daten auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$ und der zweite Typ die genauen Neumann-daten auf Γ und die iterierten Dirichletdaten auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Ein Iterationsschritt besteht aus der Kopplung zwischen zwei solchen gemischten Problemen.

Diese Art von Iteration läßt sich in den passenden Sobolev-Räumen als Potenzen eines affinen Operators T darstellen, dessen linearer Anteil T_l nichtexpansiv ist (d.h. $\|T_l\| \leq 1$). Diese Eigenschaft wird von uns benutzt, um die Konvergenz des Iterationsverfahrens mit Sätzen der Funktionalanalysis zu beweisen. Dann wird die Lösung des Cauchy-Problems als eine Lösung einer Fixpunktgleichung des Typs

$$T\varphi = \varphi.$$

betrachtet und studiert.

Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens sind möglich, wenn man a priori Kenntnis über die Eigenwerte von T_l besitzt. Für bestimmte Gebiete, kann das Definitionsgebiet von T so gewählt werden, daß man über die Spektraldarstellung von T_l verfügt. In solchen Fällen kann man die Selbstadjungiertheit von T_l und die Kompaktheit von $(I - T_l)$ beweisen und nutzen. Der Grad der Schlechtgestellttheit der Cauchy-Probleme in verschiedenen Gebieten kann verglichen werden, wenn wir uns die Eigenwerte von T_l anschauen. Es läßt sich schließen, das dieser Grad sowohl von dem Gebiet als auch von dem Typ (auf welchen $\Gamma \subset \partial\Omega$ werden die Daten vorgegeben) des Cauchy-Problems abhängt.

Eine Alternative, um Informationen über die Lösung eines Cauchy-Problems zu bekommen, ist die Anwendung der Backus-Gilbert Methode. Die Aufgabe, eine Lösung für ein Cauchy-Problem zu finden, ist immer äquivalent dazu, eine lineare Gleichung des Typs

$$A\varphi = g$$

zu lösen (siehe Kapitel 4), wobei der Operator A aus der Verknüpfung von einer Randwert-aufgabe mit einem Spuroperator besteht. Ist dann ein lineares Funktional μ auf $D(A)$ (das Definitionsgebiet von A) gegeben, erlaubt uns die Backus-Gilbert Methode das Moment

$$\langle \mu, \varphi \rangle$$

der Lösung φ zu berechnen, indem man die adjungierte Gleichung

$$A^*\psi = \mu$$

löst und die gewünschte Information durch

$$\begin{aligned} \langle \mu, \varphi \rangle &= \langle A^* \psi, \varphi \rangle \\ &= \langle \psi, A\varphi \rangle \\ &= \langle \psi, g \rangle \end{aligned}$$

ableitet. Das Verfahren ist besonders vorteilhaft, wenn die zum Punkt $P \in \partial\Omega \setminus \Gamma$ gehörende Dirac-Distribution $\delta(P-\cdot)$ (oder wenigstens eine passende Approximation dafür) zu $Rg(A^*)$ gehört. Ansonsten liefert diese Methode nur Informationen über φ , die man mit Hilfe von bestimmten Elementen aus $D(A)'$ (die sogenannten Glättungsfunktionale oder Sentinels) gewinnen kann.

Die adjungierte Gleichung $A^* \psi = \mu$ zu lösen, ist äquivalent dazu, die Lösung eines bestimmten Cauchy-Problems zu finden. Dieses Problem ist von derselben Art wie die Probleme, die mit Hilfe des Iterationsverfahrens untersucht werden.

1.2 Entwicklung der Theorie

1.2.1 Kurze historische Übersicht

Die erste Arbeit [Ma] über das in Abschnitt 1.1 vorgestellte Iterationsverfahren wurde von Maz'ya, Kozlov und Fomin in 1991 veröffentlicht. Dort wird die Iteration in $H^{-1/2}(\Gamma)$, der Dualraum von $H_0^{1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)$, untersucht und eine Topologie analog zu der aus Satz 3.2.1 benutzt. Der Konvergenzbeweis nutzte hauptsächlich die Eindeutigkeit der Lösung eines Cauchy-Problems. Die Tatsache, daß $\|T_l\| \leq 1$ ist, war damals schon bekannt. Außerdem wurde eine Regularisierungseigenschaft des Verfahrens untersucht (siehe Bemerkung 3.2.22).

In 1995 hat Bastay sich in seiner Dissertation [Bas] mit der Anwendung von verschiedenen Iterationsverfahren von Maz'ya auf allgemeine elliptische und hyperbolische Differentialgleichungen beschäftigt. Die Verfahren werden mit der Halbgruppen-Theorie analysiert und Fehlerabschätzungen werden mit Hilfe von Regularitätsannahmen über die Anfangsnäherung der Iteration hergeleitet.

Jourhmane und Nachaoui [JoNa] haben 1996 das Iterationsverfahren aus Abschnitt 1.1 auch untersucht. Sie schlagen vor, den Iterationsschritt aus [Ma] mit einer Relaxation zu verknüpfen, und dadurch die Konvergenz zu beschleunigen. Sie wählen in $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ eine Topologie analog zu der aus Satz 3.2.1 und beweisen damit sowohl die Positivität als auch die Selbstadjungiertheit von $T_\theta := \theta T + (1 - \theta)T$ für geeignete θ . Diese zwei Eigenschaften werden dann benutzt, um die Konvergenz der Iteration von T_θ mit Hilfe von Sätzen aus Krasnosel'skii et al. [Kra] zu beweisen.

Die erste Arbeit [BaG1] über die Backus-Gilbert Methode wurde 1967 veröffentlicht und in [BaG2,3] von diesen Autoren weiter untersucht. Seitdem hat die Methode große Aufmerksamkeit gerade bei Anwendungen gefunden. Die Anwendung auf das lineare Momen-

tenproblem kann man in [Ch], [HaSo], [Hu], [Ki], [LoM1,2], [Gro3] und [ScBe] finden, und die Anwendung der Methode auf nichtlineare Probleme wird in [Lo2] und [Sn] untersucht.

1.2.2 Hauptresultate der Dissertation

In dieser Arbeit definieren wir das Iterationsverfahren auf dem Raum $H_{00}^{1/2}(\Gamma)'$, dem Dualraum von $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$. Dies gibt einen taktischen Vorteil für die Wahl der Cauchydaten, da $H^{-1/2}(\Gamma)$ strikt in $H_{00}^{1/2}(\Gamma)'$ eingebettet ist (siehe Anhang A).

Wir zeigen, daß die Topologie aus Lemma 3.2.1 eine Hilbertraum–Struktur in diesem Raum definiert, die zu der üblichen Sobolev–Struktur äquivalent ist. Damit beweisen wir die Nichtexpansivität und die asymptotische Regularität von T_l (siehe Satz 3.2.7). Diese Eigenschaften von T_l werden in Satz 3.2.8 benutzt, um die Konvergenz des Verfahrens zu beweisen. Dies unterscheidet unseren Beweis von den oben erwähnten, die sich auf die Argumente von Krasnosel'skii stützen.

Die in Satz 3.2.3 bewiesenen Eigenschaften von T_l (nämlich: Positivität, Symmetrie, Injektivität und 1 ist kein Eigenwert von T_l) wurden in [JoNa] untersucht, aber sie haben die Iteration in einem anderen Raum betrachtet. Darüber hinaus nutzen wir die Spektraldarstellung von T_l , um zu beweisen, daß 1 zum (kontinuierlichen) Spektrum von T_l gehört und $\|T_l\| = 1$ ist (siehe Satz 3.2.15).

Die Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsverfahrens wird für spezielle Gebiete untersucht, deren geometrische, topologische Verschiedenheit für die Spektraldarstellung des Operators T von Bedeutung ist (dafür benötigen wir die Analyse der Cauchy–Probleme aus Kapitel 2). Die Anwendung von zwei üblichen Regularisierungsstrategien ermöglicht uns, das Verfahren für fehlerhaften Cauchydaten zu untersuchen. Für jede Strategie können wir eine optimale Anzahl von Iterationsschritten, die von dem Fehler in den Daten abhängt, wählen (siehe Satz 3.2.20).

Eine funktionalanalytische Version der Backus–Gilbert Methode wird für nichtlineare, stetig (Fréchet–) differenzierbare Operatoren formuliert. Diese unterscheidet sich von der Betrachtung in [Lo2] und [Sn] dadurch, daß wir eine Taylor–Reihenentwicklung des nichtlinearen Operators in der adjungierten Gleichung aus Abschnitt 1.1 nutzen, um die Backus–Gilbert Strategie anzuwenden (siehe Abschnitt 4.2).

Um die Backus–Gilbert Methode für das Cauchy–Problem zu benutzen, benötigen wir eine passende Korrekturformel für die adjungierte Gleichung (siehe Satz 4.3.1). In Kapitel 5 diskutieren wir über die Schwierigkeiten, die bei der numerischen Lösung der Gleichung $A^*\psi = \delta$ auftreten, denn die Frage, ob δ in $Rg(A^*)$ liegt, ist für das Cauchy–Problem analytisch noch nicht beantwortet.

1.3 Übersicht über die Dissertation

In Kapitel 2 werden die Cauchy–Probleme gründlich analysiert. Die drei speziellen Klassen von Problemen, für die wir die Untersuchung des Iterationsverfahrens durchführen, werden in den drei ersten Abschnitten vorgestellt und analysiert. Für gewisse Klassen von Problemen können wir hinreichende Bedingungen, die die Regularität der Daten betreffen, für die Existenz von H^1 –Lösungen des Cauchy–Problems herleiten und eine explizite Formel für die Lösung des Cauchy–Problems angeben.

Die Lösungstheorie für Cauchy–Probleme wird in Abschnitt 2.4 untersucht, Eindeutigkeitssätze sowohl für die klassische als auch für die schwache Formulierung dieses Problems werden diskutiert. Der Einstieg in die klassische Theorie wird durch die Sätze von Cauchy–Kowalewsky und Holmgren durchgeführt. Analoge Ergebnisse für schwache Lösungen werden dann mittels Regularitätssätzen hergeleitet. Die Existenz von variationellen Lösungen wird durch die Formulierung von hinreichenden Bedingungen garantiert, indem das Cauchy–Problem mit Hilfe von Differentialoperatoren umgeschrieben wird.

In Kapitel 3 wird das Iterationsverfahren vorgestellt und untersucht. Es wird gezeigt, daß die gemischten Probleme, die dabei auftreten, gut gestellt sind. Das Ziel dieser Untersuchung ist, das Iterationsverfahren als Fixpunktiteration eines affinen Operators T darzustellen, dessen linearer Anteil T_l nichtexpansiv ist.

Eine spezielle Formulierung des Verfahrens wird in Abschnitt 3.1 für die in Kapitel 2 präsentierten Cauchy–Probleme diskutiert; und eine explizite Darstellung des Operators T wird für solche Probleme hergeleitet. Dies wird eine Analyse der Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsverfahrens ermöglichen, die in Abschnitt 3.2 durchgeführt wird.

Die Konvergenz des Verfahrens wird in Abschnitt 3.2 mit Hilfe von Sätzen der Funktionalanalysis bewiesen. Eigenschaften wie Selbstadjungiertheit und Positivität von T_l werden dazu untersucht und eine Analyse des Spektrums von T_l gegeben.

Das Cauchy–Problem wird verwendet, um ein physikalisches Phänomen zu modellieren, das im allgemeinen fehlerhafte Daten besitzt. Deswegen werden wir Cauchy–Probleme mit fehlerhaften Daten betrachten, indem wir passende Regularisierungsstrategien untersuchen. Dafür machen wir Gebrauch von der Spektraldarstellung von T_l . Die hierzu hilfreichen Sätze der Spektral–Theorie für lineare beschränkte selbstadjungierte Operatoren in Hilbert–Räumen werden präsentiert.

Im Kapitel 4 wird die Backus–Gilbert Methode diskutiert. Wir beginnen in Abschnitt 4.1 mit der ursprünglichen Formulierung von G.Backus und J.Gilbert in [BaGi] und [Gro3] und der Anwendung auf das endlichdimensionale Momentenproblem.

Eine funktionalanalytische Version des Verfahrens für beschränkte lineare (und bestimmte nichtlineare) Operatoren in Hilbert–Räumen wird vorgestellt. Probleme mit fehlerhaften Daten werden betrachtet und eine Fehleranalyse durchgeführt. Regularisierungsstrategien werden vorgeschlagen als eine Alternative für den Fall $\delta \notin Rg(A^*)$. Zwei Anwendungen der Backus–Gilbert Methode werden im Detail analysiert. Die erste betrifft ein nichtlineares

Momentenproblem in $L^2(0, 1)$ und die zweite ein lineares Cauchy–Problem aus Kapitel 2.

Im Kapitel 5 werden mehrere numerische Beispiele präsentiert, die die Anwendung des Iterationsverfahrens und der Backus–Gilbert Methode illustrieren. In Abschnitt 5.1 wird die Anwendung der Backus–Gilbert Strategie auf ein nichtlineares Momentenproblem getestet. In Abschnitt 5.2 nutzen wir das Iterationsverfahren, um die Dirichlet– bzw. Neumanndaten von Cauchy–Problemen zu rekonstruieren. In einem anderen Beispiel werden unsere Ergebnisse mit denen von Falk und Monk verglichen, der in [Mo] eine andere Rekonstruktionsstrategie benutzte. Wir präsentieren auch ein Beispiel, in dem die Korrekturformel aus Abschnitt 4.3.2 numerisch getestet wird.

In Anhang A werden die notwendigen Definitionen von Sobolev–Räumen präsentiert, die in der gesamten Arbeit benutzt werden. Insbesondere benötigen wir die Räume $H_0^k(\Omega \cup \Gamma)$, $H^k(\Omega \cup \Gamma)$, $H^1(\Omega; \Delta)$, $H^{1/2}(\Omega)$ und $H_{00}^{1/2}(\Omega)$. Die Rand–Räume $H^s(\partial\Omega)$ werden mit Hilfe von local maps¹ und der Partition der Eins definiert. Damit haben wir alle Hilfsmittel für die Untersuchung der gemischten Randwertaufgaben in Anhang B zur Verfügung.

Zuerst werden die Räume von glatten Funktionen eingeführt und die Sobolev–Räume werden als Abschluß davon definiert, indem man das Konzept der distributionellen Ableitung nutzt. Andere nützliche äquivalente Definitionen für die Räume $H^s(\Omega)$ werden mit unseren verglichen. Einige notwendige Einbettungssätze werden präsentiert.

In Anhang B werden spezielle Versionen des Spursatzes analysiert. Uns interessiert insbesondere, welche Regularität die Spur einer $H^1(\Omega)$ –Distribution auf $\Gamma \subset \partial\Omega$ besitzt. Diese Analyse spielt eine große Rolle in der Untersuchung der Topologie von Satz 3.2.1.

Die Spursätze erlauben uns weiter eine spezielle Version der Greenschen Formel herzuleiten, die im Kern der Untersuchung der adjungierten Gleichung unserer elliptischen Cauchy–Probleme liegt. Untersucht wird auch die Frage nach der Regularität der Spur auf $\partial\Omega/\Gamma$ einer $H^1(\Omega; \Delta)$ –Distribution, wenn man annimmt, daß die Spur dieser Distribution auf Γ eine bestimmte Regularität besitzt. Dieses Ergebnis benötigen wir für die Formulierung des Iterationsverfahrens.

Die gemischten Randwertaufgaben aus Kapitel 3 werden auch in Anhang B untersucht. Das Hauptziel ist zu zeigen, daß dies gut gestellte Probleme im Sinne von Hadamard sind. Dies wird in der Analyse der Cauchy–Probleme in Kapitel 2, sowie in der Analyse des Iterationsverfahrens von Kapitel 3 benutzt.

¹Siehe Definition A.3.1.

Kapitel 2

Das Cauchy–Problem

In diesem Kapitel wird die allgemeine Theorie über Cauchy–Probleme aufbereitet. Insbesondere werden drei spezielle Probleme vorgestellt, für die die Untersuchung des Iterationsverfahrens im nächsten Kapitel genauer durchgeführt wird. Es handelt sich um zwei Probleme auf einer Kreisringgeometrie und eines auf einer Rechteckgeometrie. Die Analyse dieser drei Probleme ist der Ausgangspunkt für die Untersuchung des Iterationsverfahrens in nächsten Kapitel.

Ein weiterer zu erfassender Punkt ist die Lösungstheorie für allgemeine Cauchy–Probleme. In dieser Richtung werden Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen untersucht. Uns interessieren die Ergebnisse in Hinsicht auf die variationellen Lösungen. Die klassische Theorie dient als Vorbereitung dazu und wird deswegen zunächst betrachtet.

Wir haben unsere Untersuchung mit dem Cauchy–Problem in Abschnitt 2.1 begonnen. Die Besonderheit dieses Problems auf einer Kreisringgeometrie liegt darin, daß in der Formulierung des Iterationsverfahrens von Kapitel 3 spezielle gemischte Probleme vorkommen, für die starke Aussagen über Lösungsregularität zur Verfügung stehen (siehe [Gr1,2] und [Wn]). Der Nachteil ist, daß man nichts über die Spektraldarstellung des Operators T (siehe Kapitel 1) weiß.

Beim zweiten Problem versuchen wir die Schwierigkeit mit der Spektraldarstellung zu beseitigen. Wir wählen dazu ein Gebiet, in der unter bestimmten Voraussetzungen über die Cauchydaten es möglich ist, die Lösung sowohl von Cauchy–Problemen als auch von gemischten Problemen explizit in Abhängigkeit der Daten hinzuschreiben. Unsere Untersuchungen zeigen, daß die Rechteckgeometrie dafür geeignet ist. Im nächsten Kapitel werden wir feststellen, daß es in einem solchen Gebiet möglich ist, die Einschränkung des Operators T auf einen bestimmten Sobolev–Raum¹ analytisch hinzuschreiben, da man über die Darstellung der Lösung von gemischten Problemen verfügt. Als Konsequenz daraus folgt, daß in diesem Gebiet die Iteration explizit beschreibbar ist.

Das dritte Problem repräsentiert den Versuch, eine Brücke zwischen den ersten beiden

¹nämlich auf den Raum $H_{per}^{-1/2}$

zu bauen. Die Kreisringgeometrie wird wieder benutzt und die Cauchydaten bzw. das Definitionsgebiet von T werden so gewählt, daß man wieder eine analytische Darstellung des Operator T besitzt.

In Abschnitt 2.4 werden Sätze bewiesen, die die Eindeutigkeit der Lösung von bestimmten Cauchy-Problemen garantieren. Der Weg, der zu der klassischen Theorie führt, nämlich die Sätze von Cauchy-Kowalewsky und Holmgren, wird zuerst untersucht und eine Verallgemeinerung dieser Ergebnisse für H^1 -Lösungen wird präsentiert.

2.1 Die Kreisringgeometrie

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein offener Ring mit inneren bzw. äußeren Radius r bzw. 1 , wobei $0 < r < 1$ ist. Das Gebiet Ω hat einen glatten Rand, dessen äußeren Teil in zwei zusammenhängende Komponenten zerlegt werden soll, nämlich

$$\Gamma_l := \{(x, y) \in \partial\Omega / \|(x, y)\| = 1 \text{ und } x < 0\}^2$$

und

$$\Gamma_r := \{(x, y) \in \partial\Omega / \|(x, y)\| = 1 \text{ und } x > 0\}.$$

Der innere Teil von $\partial\Omega$ wird Γ_i genannt (siehe Bild 2.1.a).

Eine mögliche physikalische Interpretation für dieses mathematische Problem ist, die Temperatur bzw. den thermischen Fluß einer halb versteckten, durch eine Wand laufenden Leitung, im unerreichbaren Rand Γ_r zu rekonstruieren (siehe Bild 2.1.b). Die bekannten Daten sind die Temperatur f und der thermische Fluß g am linken Rand Γ_l . Die Werte der Lösung u im inneren Teil des Rands Γ_i spielen keine wichtige Rolle bei der Formulierung des Problems, weil die Annahme $u_\nu = 0$ auf Γ_i physikalisch gerechtfertigt ist. Wir werden in manchen Fällen auch die homogene Randbedingung für die Neumanndaten auf Γ_l nutzen.

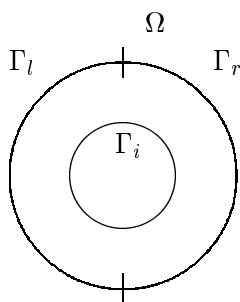


Bild 2.1.a

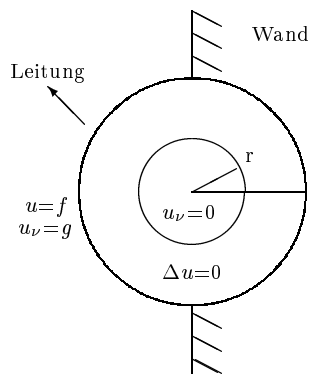


Bild 2.1.b

Wir wollen die Theorie von schwachen Lösungen von Differentialgleichungen anwenden. Deswegen werden wir das Cauchy-Problem folgendermaßen formulieren: Gegeben die

² $\|\cdot\|$ repräsentiert die Euklidische Norm in \mathbb{R}^2 .

Randdaten f und g , finde eine Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von

$$(CP \ a) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ in } \Omega \\ u = f & , \text{ auf } \Gamma_l \\ u_\nu = g & , \text{ auf } \Gamma_l \\ u_\nu = 0 & , \text{ auf } \Gamma_i \end{cases}$$

Gewünscht ist, die Dirichlet- und Neumannspur der Lösung u auf dem Randstück Γ_r zu rekonstruieren, unter der Annahme, daß eine Lösung existiert.

Die erste Frage, die sich stellen läßt, lautet: Aus welchem Raum sollen die Cauchydaten f und g gewählt werden, damit das Problem (CP a) in $H^1(\Omega)$ wohlformuliert bleibt? Um das zu beantworten, nutzt man den Spursatz für glatte Gebiete.³ Eine Konsequenz dieses Satzes ist, daß die Dirichlet- bzw. Neumannspur einer $H^1(\Omega; \Delta)$ Funktion in $H^{1/2}(\partial\Omega)$ bzw. $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ liegt. Deswegen ist es plausibel, die Randdaten (f, g) in $H^{1/2}(\Gamma_l) \times H^{-1/2}(\Gamma_l)$ zu wählen. Dies kann aber noch genauer formuliert werden.

Da die Lösung u des Problems (CP a), wenn sie existiert, harmonisch ist, gilt $u \in H^1(\Omega; \Delta)$.⁴ Nun folgt aus dem Satz B.1.6, $u_\nu|_{\Gamma_l} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$. Damit ist das Problem (CP a) für Randdaten (f, g) aus $H^{1/2}(\Gamma_l) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$ wohlformuliert.

Der nächste zu untersuchende Punkt betrifft die Schlechtgestelltheit des Problems (CP a). Zunächst ist es nicht wahr, daß für alle (f, g) aus $H^{1/2}(\Gamma_l) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$ eine entsprechende H^1 -Lösung des Problems (CP a) existiert (siehe Abschnitt 2.4). Weiter liegt die stetige Abhängigkeit von den Randdaten für solche Probleme nicht vor. Dies kann man mit Hilfe des nächsten Beispiels feststellen.

Beispiel 2.1.1 Sei Ω der Kreisring mit Radius 1 bzw. 1/2, im Ursprung zentriert. Wir betrachten die Funktionen definiert für $z \in \Omega$

$$u(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{und} \quad u_k(z) = \frac{1}{(1+1/k)-z}, k \in \mathbb{N},$$

die holomorph auf Ω sind. Wenn wir den reellen Anteil davon nehmen, haben wir die folgenden harmonischen Funktionen auf Ω

$$v(x, y) = \operatorname{Re} u(x + iy) = \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2}$$

und

$$v_k(x, y) = \operatorname{Re} u_k(x + iy) = \frac{1+1/k-x}{(1+1/k-x)^2 + y^2}.$$

Es ist klar, daß die Funktionen v_k Lösungen der Cauchy-Probleme

³Siehe Anhang B.1.

⁴ $H^1(\Omega; \Delta) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega)\}$

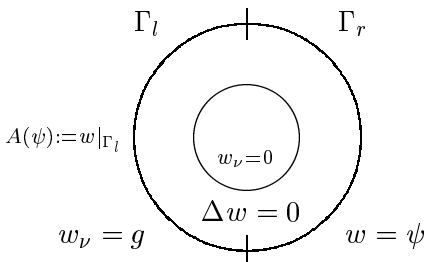
$$\begin{cases} \Delta w = 0 & , \text{ in } \Omega \\ w = v_k & , \text{ auf } \Gamma_l \\ w_\nu = v_{k_\nu} & , \text{ auf } \Gamma_l \\ w_\nu = v_{k_\nu} & , \text{ auf } \Gamma_i \end{cases}$$

sind. Die Funktion u wurde so gewählt, daß sie einen Pol an der Stelle $z = 1$ besitzt und die H^1 -Norm von v unbeschränkt ist. Die Folge $\{v_k\}$ ist zwar in $H^1(\Omega)$ (die v_k sind sogar analytisch in Ω), aber sie ist unbeschränkt in der Norm dieses Raums. In der Tat, ist es möglich die Existenz einer positiven Konstante c zu beweisen, so daß für genügend großes k die Abschätzung

$$\|v_k\|_{H^1(\Omega)} \geq c|\ln(1/k^2)|$$

gilt. Eine kurze Rechnung zeigt, daß sowohl die Dirichlet- bzw. Neumannspur von v_k auf Γ_l als auch die Neumannspur von v_k auf Γ_i gleichmäßig gegen die entsprechenden Spuren von v konvergieren. Wir haben also eine Folge von H^1 -Lösungen $\{v_k\}$, deren entsprechenden Randdaten konvergieren (in einer feinen Topologie sogar), aber die selbst in $H^1(\Omega)$ nicht konvergiert. ■

Wir haben vor, unsere Zielaufgabe, nämlich die Bestimmung der Spur der Lösung auf dem Randstück, wo keine Daten vorgeschrieben sind, in Form einer Operatorgleichung zu untersuchen. Deswegen definieren wir den Operator A , der die unbekannte Dirichletspur auf die bekannte Dirichletspur abbildet. Diese Verknüpfung zwischen beiden Dirichletdaten wird durch ein gemischtes Problem hergestellt, das auf einer Seite des Rands die gegebenen Neumanndaten und auf der anderen die unbekanntes Dirichletdaten nutzt. Für das Problem (CP a) mit Daten (f, g) bildet der Operator A ein $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_r)$ nach $w|_{\Gamma_l} \in H^{1/2}(\Gamma_l)$ ab, wobei die Funktion $w \in H^1(\Omega)$ folgendes gemischtes Problem löst:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{ in } \Omega \\ w_\nu|_{\Gamma_l} = g \\ w|_{\Gamma_r} = \psi \\ w_\nu|_{\Gamma_i} = 0 \end{cases}$$


Aus der Definition von A folgt, daß das Problem (CP a) formal äquivalent zur Lösung einer Gleichung vom Typ

$$A\psi = f$$

ist, wobei der Operator A affin ist, und sein linearer Anteil ein beschränkter Operator von $H^{1/2}(\Gamma_r)$ nach $H^{1/2}(\Gamma_l)$ ist (siehe Abschnitt 2.4).

2.2 Die Rechteckgeometrie

Das zweite Cauchy-Problem, das in dieser Arbeit untersucht wird, ist das Beispiel von Hadamard (siehe Kapitel 1). Sei $\Omega = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2$. Analog zu der Betrachtung, die in der Kreisringgeometrie gemacht wurde, setzen wir

$$\Gamma_l := \{(x, y) \in \partial\Omega \mid x = -\pi\}$$

und

$$\Gamma_r := \{(x, y) \in \partial\Omega \mid x = \pi\}.$$

Zu gegebenen Cauchydaten (f, g) in $H^{1/2}(\Gamma_l) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$, suchen wir nach einer $H^1(\Omega)$ Lösung des Cauchy-Problems

$$(CP \ b) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ in } \Omega \\ u = f & , \text{ auf } \Gamma_l \\ u_\nu = g & , \text{ auf } \Gamma_l \\ u(x, \pm\pi) = 0 & , x \in (-\pi, \pi) \end{cases}$$

In diesem Gebiet haben wir den Vorteil, daß aus der Annahme, daß f und g eine Fourierreihenentwicklung der Art

$$f(y) = \sum_{j=1}^N a_j \sin(jy) \quad \text{und} \quad g(y) = \sum_{j=1}^N b_j \sin(jy), \quad N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \quad (2.1)$$

mit reellen Koeffizienten a_j und b_j besitzen, eine explizite Darstellung der Lösung u des Problems (CP b) folgt. In der Tat ist

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^N \left(a_j \cosh(j(x + \pi)) + \frac{b_j}{j} \sinh(j(x + \pi)) \right) \sin(jy). \quad (2.2)$$

Falls $N = \infty$ in (2.1) ist, können wir eine hinreichende Bedingung an die Asymptotik der Fourierkoeffizienten von f und g herleiten, damit die Funktionenreihe in (2.2) in $H^1(\Omega)$ konvergiert. Dafür wird die Norm von u folgendermaßen abgeschätzt:

$$\|u\|_{H^1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j \cosh(j(x + \pi)) \sin(jy)\|_{H^1} + \left\| \frac{b_j}{j} \sinh(j(x + \pi)) \sin(jy) \right\|_{H^1} \leq$$

$$\leq c \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{1/2} |a_j| \cosh(2j\pi) + \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1/2} |b_j| \cosh(2j\pi) \right).$$

Wenn man $\beta_j := \cosh(2j\pi)$ setzt, folgt für $p \geq 1$ aus der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\|u\|_{H^1} \leq c \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} j a_j^2 \beta_j^{2+\frac{1}{p}} \right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} b_j^2 \beta_j^{2+\frac{1}{p}} \right)^{1/2} \right]. \quad (2.3)$$

Wenn die beiden Reihen in (2.3) konvergieren, dann ist die in (2.2) definierte Funktion die H^1 –Lösung des Problems (CP b).

Bemerkung 2.2.1 Die Motivation für diese Abschätzung der H^1 –Norm von u ist, daß die Reihen in (2.3) genau den Normen von f bzw. g in den Sobolev–Räumen $H_{per}^{1/2}(\Gamma_i)$ bzw. $H_{per}^{-1/2}(\Gamma_i)$ mit dem exponentiellen Gewicht $\beta_j^{2+1/p}$ entsprechen.

2.3 Wieder die Kreisringgeometrie

Sei Ω wie in Abschnitt 2.1 ein offener Ring mit innerem bzw. äußerem Radius r_0 bzw. 1, wobei $0 < r_0 < 1$ ist. Das Gebiet Ω hat einen glatten Rand, der sich in zwei zusammenhängende Komponenten zerlegen läßt, nämlich

$$\Gamma_o := \{(x, y) \in \partial\Omega / \|(x, y)\|_2 = 1\}$$

und

$$\Gamma_i := \{(x, y) \in \partial\Omega / \|(x, y)\|_2 = r_0\}.$$

Hier werden wir uns mit folgendem Cauchy–Problem auf Ω beschäftigen: Gegeben die Randdaten (f, g) in $H^{1/2}(\Gamma_o) \times H^{-1/2}(\Gamma_o)$, finde eine H^1 –Lösung von

$$(CP \ c) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ in } \Omega \\ u = f & , \text{ auf } \Gamma_o \\ u_\nu = g & , \text{ auf } \Gamma_o \end{cases}$$

Obwohl dieses Problem in demselben Gebiet wie das (CP a) formuliert wird, stellt man fest, daß es viel ähnlicher zum Problem (CP b) als zum Problem (CP a) ist, wenn man an das Lösungsverhalten der Cauchy–Probleme denkt. Für bestimmte Cauchydaten ist es möglich, die Lösung des Problems (CP b) explizit darzustellen.

Wie in der Rechteckgeometrie machen wir die Annahme, daß die Funktionen $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_o) \times H^{-1/2}(\Gamma_o)$ Fourierreihenentwicklungen

$$f(\theta) = f_0 + \sum_{j \geq 1} \left(f_j^{(1)} \sin(j\theta) + f_j^{(2)} \cos(j\theta) \right)$$

und

$$g(\theta) = g_0 + \sum_{j \geq 1} \left(g_j^{(1)} \sin(j\theta) + g_j^{(2)} \cos(j\theta) \right)$$

haben, wobei $\theta \in (-\pi, \pi)$ ist.

Die Annahme, daß die entsprechende Lösung von (CP c) sich als ein Produkt vom Typ $u(r, \theta) = v(r)w(\theta)$ schreiben läßt, liefert für das Cauchy-Problem mit Daten (f, g) die Lösung

$$u(r, \theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(a_j r^j \sin(j\theta) + b_j r^j \cos(j\theta) \right) + s \ln(r) \quad (2.4)$$

mit Koeffizienten $s = g_0$,

$$a_j = \begin{cases} \frac{1}{2}f_j^{(1)} + \frac{1}{2j}g_j^{(1)} & , j > 0 \\ -\frac{1}{2}f_j^{(1)} + \frac{1}{2j}g_j^{(1)} & , j < 0 \\ 0 & , j = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad b_j = \begin{cases} \frac{1}{2}f_j^{(2)} + \frac{1}{2j}g_j^{(2)} & , j > 0 \\ \frac{1}{2}f_j^{(2)} - \frac{1}{2j}g_j^{(2)} & , j < 0 \\ f_0 & , j = 0 \end{cases} .$$

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß u in (2.4) in H^1 ist, gewinnt man mit Hilfe der Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1} &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|a_j r^j \sin(j\theta) + b_j r^j \cos(j\theta)\|_{H^1} + \|s \ln(r)\|_{H^1} \\ &\leq c \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^{1/2} |a_j| \left(\frac{1}{r_0}\right)^{j+1} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^{1/2} |b_j| \left(\frac{1}{r_0}\right)^{j+1} \right) + c(r_0) |s|. \end{aligned}$$

Aus der Definition der Koeffizienten a_j und b_j folgt nun, daß die in (2.4) definierte Funktion in $H^1(\Omega)$ sein wird, falls

$$\sum_{j > 0} j^{1/2} |f_j^{(i)}| \left(\frac{1}{r_0}\right)^{j+1} < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{j > 0} j^{-1/2} |g_j^{(i)}| \left(\frac{1}{r_0}\right)^{j+1} < \infty, \quad i = 1, 2 \quad (2.5)$$

gilt.

Setze $G_j := (1/r_0)^{j+1}$. Gegeben $p \geq 1$, folgt die Konvergenz der Reihen in (2.5) aus der Beschränktheit von

$$\sum_{j>0} j \left([f_j^{(1)}]^2 + [f_j^{(2)}]^2 \right) G_j^{2+\frac{1}{p}} \quad \text{und} \quad \sum_{j>0} j^{-1} \left([g_j^{(1)}]^2 + [g_j^{(2)}]^2 \right) G_j^{2+\frac{1}{p}}. \quad (2.6)$$

Bemerkung 2.3.1 Die Reihen in (2.6) entsprechen den Normen von f bzw. g in den Sobolev-Räumen $H_{per}^{1/2}((-\pi, \pi))$ bzw. $H_{per}^{-1/2}((-\pi, \pi))$ mit dem exponentiellen Gewicht $G_j^{2+1/p}$.

2.4 Lösungstheorie

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Eindeutigkeitsätzen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Lösung des Cauchy-Problems. In Kapitel 1 wurde ein Beispiel in einer Rechteckgeometrie präsentiert, das zeigte, daß sogar für sehr glatte Cauchydaten die Existenz einer entsprechenden Lösung nicht garantiert werden kann. Es ist tatsächlich so, daß Existenzbedingungen erst abgeleitet werden können, wenn man in der Lage ist, das Cauchy-Problem mit Hilfe von Integral- oder Differentialoperatoren umzuformulieren und die Cauchydaten mit Hilfe dieser Operatoren zu verknüpfen.

Der hier präsentierte Eindeutigkeitsatz ist eine Verallgemeinerung des klassischen Ergebnis der Theorie für Differentialoperatoren mit analytischen Koeffizienten. Die Sätze von Cauchy-Kowalewsky und Holmgren werden zusammen mit Regularitätssätzen für schwache Lösungen benutzt, um eine Aussage über das Cauchy-Problem für den Laplace-Operator zu machen.

Definition 2.4.1 Sei eine partielle Differentialgleichung der Ordnung m in \mathbb{R}^n und eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit Γ gegeben. Sei u die Lösung des Cauchy-Problems für die gegebene Differentialgleichung mit Cauchydaten auf Γ . Die Mannigfaltigkeit Γ heißt charakteristisch bezüglich dieser Differentialgleichung, wenn nicht alle partiellen Ableitungen von u bis zur Ordnung m sich aus den Cauchydaten bestimmen lassen.

Man stellt fest, daß die elliptischen Differentialgleichungen (insbesondere die Laplacegleichung) keine charakteristische Mannigfaltigkeit besitzen. Im nächsten Satz von A.L. Cauchy (1789–1857) und S. Kowalewsky (1850–1891) wird die Eindeutigkeit einer lokalen analytischen Lösung eines Cauchy-Problems bewiesen, dessen Differentialoperator analytische Koeffizienten besitzt und dessen Daten analytisch auf einer analytischen nicht-charakteristischen Mannigfaltigkeit gegeben sind.

Satz 2.4.2 (Cauchy-Kowalewsky) Sei F ein Differentialausdruck der Ordnung m in \mathbb{R}^n mit analytischen Koeffizienten:

$$F = F(x, u, \dots, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u, \dots),$$

wobei α ein Multiindex mit $|\alpha| \leq m$ ist. Sei Γ eine analytische, bezüglich F nicht-charakteristische, $n - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und $x_0 \in \Gamma$. Seien f_j , $j = 0, \dots, m - 1$ analytische Funktionen auf Γ . Dann gibt es eine Umgebung von x_0 in \mathbb{R}^n , in der das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} F(x, u, \dots, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u, \dots) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j u = f_j, \text{ auf } \Gamma \end{cases}$$

analytisch eindeutig lösbar ist.

Den Beweis dieses Satzes kann man etwa in [Fo] St. 69, [DaLi] oder [Jo] nachlesen. Der nächste Satz von Holmgren wird von manchen Autoren als Korollar des Satzes von Cauchy-Kowalewsky präsentiert. Er zeigt, daß es für lineare Differentialgleichungen keine andere nicht-analytische Lösung gibt, sogar wenn man auf die Analytizität der Cauchydaten verzichtet. Einen Beweis dieses Satzes kann man z.B. in [Jo] St. 65, [Hö] oder [DaLi] finden.

Satz 2.4.3 (Holmgren) Sei L der lineare Differentialoperator

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u,$$

mit analytischen Koeffizienten a_α und Γ eine analytische nicht-charakteristische Mannigfaltigkeit. Dann hat das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} Lu = f \\ \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j u = f_j, \text{ auf } \Gamma \end{cases}$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung jeder kompakten Teilmenge $\Gamma_0 \subset \Gamma$ höchstens eine klassische Lösung, wobei die Cauchydaten $f_j, j = 0, \dots, m - 1$ und die rechte Seite f nur stetig vorausgesetzt sind.

Damit wir auch schwache Lösungen von Cauchy-Problem behandeln können, werden wir Gebrauch von einigen Regularitätssätzen machen. Der erste Satz macht Aussagen über die lokale Regularität der schwachen Lösung einer Differentialgleichung, deren Operator stark-elliptisch ist. Den Beweis kann man in [Au1], [DaLi] St. 426 oder in [Fo] St. 269 finden.

Satz 2.4.4 Gegeben sei ein linearer Differentialoperator L zweiter Ordnung mit $C^\infty(\Omega)$ -Koeffizienten, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet ist. Die entsprechende Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ sei stark koerziv. Wenn die Distribution u die Gleichung $Lu = \psi$ mit $\psi \in H_{\text{loc}}^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ genügt, dann ist $u \in H_{\text{loc}}^{k+2}(\Omega)$.⁵

⁵Der Satz bleibt richtig für Operatoren der Ordnung $2m$. In diesem Fall ist u in $H_{\text{loc}}^{k+2m}(\Omega)$.

Korollar 2.4.5 *Unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 2.4.4 folgt aus $\psi \in C^\infty(\Omega)$, daß auch u in $C^\infty(\Omega)$ liegt.*

Dieses Korollar folgt aus Satz 2.4.4 und dem Sobolev–Lemma: $H^k(\Omega) \subset C^j(\bar{\Omega})$, für $k > j + (n/2)$.⁶

Wir haben nun alle Sätze zur Verfügung, die wir benötigen, um den Eindeutigkeitsatz von schwachen Lösungen des Cauchy–Problems zu beweisen.

Satz 2.4.6 *Sei Ω ein offenes, beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet von \mathbb{R}^2 mit analytischem Rand, Γ ein offenes zusammenhängendes Randstück von $\partial\Omega$ und der Operator L definiert wie in Satz 2.4.4. Dann besitzt das Cauchy–Problem*

$$\begin{cases} Lu = \psi & , \text{ in } \Omega \\ u = f & , \text{ auf } \Gamma \\ u_\nu = g & , \text{ auf } \Gamma \end{cases}$$

für $\psi \in L^2(\Omega)$, $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ und $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)'$ höchstens eine Lösung in $H^1(\Omega)$.

Beweis: Sind u_1 und u_2 zwei H^1 –Lösungen des Cauchy–Problems, dann löst $u = u_1 - u_2$ folgendes Problem:

$$\begin{cases} Lu = 0 & , \text{ in } \Omega \\ u = u_\nu = 0 & , \text{ auf } \Gamma \end{cases} .$$

Da $Lu = 0$ ist, folgt aus Korollar 2.4.5 mit $\psi = 0$, daß $u \in C^\infty(\Omega)$ ist. Dann ist u eine klassische Lösung des Cauchy–Problems mit homogenen Daten auf Γ .

Der Operator L ist elliptisch und sowohl Γ als auch $\partial\Omega \setminus \Gamma$ sind nicht–charakteristische Mannigfaltigkeiten. Es ist möglich, eine Familie von analytischen Mannigfaltigkeiten Γ_λ , $0 \leq \lambda \leq 1$ zu finden, so daß $\Gamma_0 = \Gamma$, $\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma$ und alle Γ_λ denselben Endpunkten haben. Wenn wir die Familie Γ_λ im Beweis von Satz 2.4.3 nutzen, folgt aus diesem Satz, daß die Funktion u identisch auf Ω verschwinden muß. ■

Die Voraussetzungen bezüglich Ω können abgeschwächt werden, falls $L = \Delta$ der Laplace Operator ist. Damit ist gemeint, daß wir auf die Annahme, Ω sei einfach zusammenhängend, verzichten dürfen. Das folgt ohne weiteres aus der Analytizität der Lösung u in Ω . In der Tat, für $x \in \Omega$ und $\Omega' = B_\delta(x) \subset\subset \Omega$ löst u die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & , \text{ in } \Omega' \\ w = u & , \text{ auf } \partial\Omega' \\ w_\nu = u_\nu & , \text{ auf } \partial\Omega' \end{cases} .$$

⁶Siehe dafür [Fo] S. 276 oder [Ad].

Aus der Greenschen Darstellungsformel⁷

$$u(x) = \int_{\partial\Omega'} \{G_{\nu_y}(x, y)u(y) - G(x, y)u_\nu(y)\} dS(y)$$

folgt die Analytizität von u in einer Umgebung von x und daraus die Analytizität auf ganz Ω . Aus dem Satz 2.4.2 schließt man, daß u in einer Umgebung von Γ identisch Null sein muß. Dann verschwindet u auf Ω .

Die Eindeutigkeit von Cauchy-Problemern ist also eine relativ einfach zu beantwortende Frage. Dasselbe kann man über die Existenz nicht sagen. Diese hängt nicht nur von den Cauchydaten ab, sondern auch von dem Gebiet Ω . Die Funktion

$$v(x, y) = \frac{(1-x)}{((1-x)^2 + y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$$

aus Abschnitt 2.1 liefert ein Beispiel dafür. Sie ist die einzige analytische Lösung von

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & , \text{ in } \Omega \\ w = v & , \text{ auf } \Gamma_l \\ w_\nu = v_\nu & , \text{ auf } \Gamma_l \end{cases}$$

wobei $\Omega = B_1(0, 0)$ und $\Gamma_l = \{(x, y) \in \partial\Omega; x < 0\}$ ist. Aber sie kann nicht in den Punkt $(1, 0)$ analytisch fortgesetzt werden. Das heißt, daß für jedes $\Omega_\epsilon = \Omega \cup B_\epsilon(1, 0)$ das Cauchy-Problem auf Ω_ϵ keine H^1 -Lösung besitzt.⁸

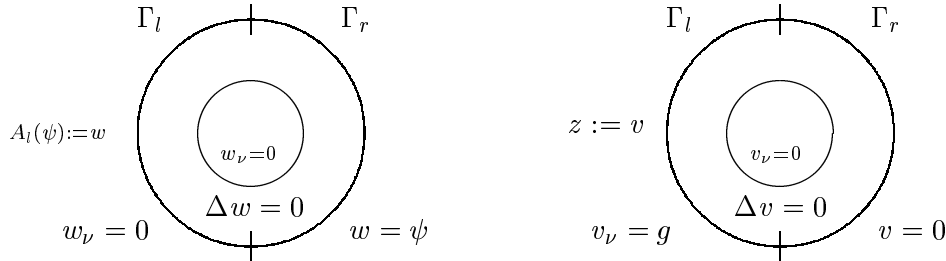
Der nächste zu untersuchende Punkt betrifft die Existenz von Lösungen. Hier werden nur die Cauchy-Probleme für die Laplacegleichung betrachtet, aber das Argument gilt auch für andere elliptische Differentialgleichungen. Nehmen wir an, daß wir eine Lösung des Cauchy-Problems (CP a) suchen. In Abschnitt 2.1 wurde gezeigt (siehe S. 11), wie ein Cauchy-Problem mit Daten f und g in eine Gleichung

$$A\psi = f$$

umgeschrieben wird. Den Operator A dürfen wir in $A = A_l + z$ aufspalten, wobei der lineare Anteil A_l und die von g abhängige feste Funktion z durch die Randwertaufgabe

⁷für Details siehe [Fo] S. 104 oder [Jo].

⁸Für $r > 0$ und $P \in \mathbb{R}^2$ setze $B_r(P) := \{x \in \mathbb{R}^2; \|x - P\| < r\}$.



definiert sind. Die Cauchydaten (f, g) werden aus $H^{1/2}(\Gamma_l) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$ genommen. Um zu verifizieren, ob A_l eine beschränkte Abbildung von $H^{1/2}(\Gamma_r)$ nach $H^{1/2}(\Gamma_l)$ ist, brauchen wir nur seine Norm durch

$$\|A_l \psi\|_{H^{1/2}} \leq c_1 \|w\|_{H^1} \leq c_2 \|\psi\|_{H^{1/2}}$$

abzuschätzen. Hier ist die erste Ungleichung eine Konsequenz der Stetigkeit der Spuroperator von $H^1(\Omega)$ nach $H^{1/2}(\Gamma_l)$, und die zweite folgt aus der stetigen Abhängigkeit der Lösung eines gemischten Problems von den Randdaten (Satz von Lax–Milgram).

Die Aufgabe, die sich uns nun stellt, besteht aus der Untersuchung der Lösbarkeit der linearen Gleichung

$$A_l \psi = f - z,$$

wobei der Operator A_l durch die Verknüpfung einer Differentialgleichung mit einem Spuroperator definiert wird.⁹ Für den Fall $g \equiv 0$ ist es nun klar, daß das Cauchy–Problem eine Lösung besitzt genau dann, wenn f in $Rg(A_l)$ liegt. Ansonsten definieren wir den stetigen linearen Operator $Z : H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)' \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_l)$ durch $Z(\psi) := v|_{\Gamma_l}$, wobei die H^1 -Funktion v das gemischte Problem

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & , \text{ in } \Omega \\ v = 0 & , \text{ auf } \Gamma_r \\ v_\nu = \psi & , \text{ auf } \Gamma_l \end{cases}$$

löst. Die Lösbarkeit des Cauchy–Problems ist dann äquivalent zu

$$f + Z(g) \in Rg(A_l),$$

wobei $Rg(A_l)$ nicht abgeschlossen ist.¹⁰

⁹Aus Satz 2.4.6 kann man schließen, daß $A_l(\psi) = 0 \Rightarrow \psi = 0$, d.h., $N(A_l) = \{0\}$.

¹⁰Das ist wieder eine Konsequenz daraus, daß eine stetige Abhängigkeit der Lösung des Cauchy–Problems bezüglich der Anfangsdaten nicht gegeben ist.

Es ist auch möglich, eine Existenzbedingung für das Cauchy-Problem aus der Randintegraldarstellung abzuleiten. Kennen wir die Greensche Funktion K für das Gebiet Ω , kann eine in Ω harmonische Funktion aus den Dirichletdaten rekonstruiert werden. Dies folgt aus der Greenschen Darstellungsformel¹¹

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} K(x, y) u_\nu(y) dS(y). \quad (2.7)$$

Da in (CP a) die Bedingung $u_\nu|_{\Gamma_i} \equiv 0$ gilt, folgt aus (2.7), daß $u = (Fu_\nu|_{\Gamma_o})$ ist, wobei F ein Integraloperator mit Kern K ist.

Gegeben die Cauchydaten (f, g) in $H^{1/2}(\Gamma_l) \times H^{-1/2}(\Gamma_l)$, definieren wir die Menge

$$M = \{\tilde{g} \in H^{-1/2}(\Gamma_o) ; \tilde{g}|_{\Gamma_l} = g\}$$

der möglichen $H^{-1/2}$ Fortsetzungen von g auf das gesamte Randstück Γ_o .¹² Die Lösbarkeit des Cauchy-Problems ist nun äquivalent zu der Lösbarkeit von

$$\begin{cases} \gamma_l F(\tilde{g}) = f \\ \tilde{g} \in M \end{cases},$$

wobei γ_l der Dirichlet-Spuroperator von $H^1(\Omega)$ nach $H^{1/2}(\Gamma_l)$ ist.

Die hier abgeleiteten Bedingungen geben keine definitive Antwort auf die Frage nach der Existenz von Lösungen eines Cauchy-Problems, da für $Rg(A_l)$ keine Charakterisierung im Sinne von Sobolev-Räumen vorliegt. Andere Arten von Aussagen, die die Regularität von f und g betreffen, sind noch unbekannt.

¹¹für Details siehe [Jo] S. 84

¹²Wir nutzen hier die Notation der Abschnitte 2.1 und 2.3

Kapitel 3

Das Iterationsverfahren

In diesem Kapitel wird ein Iterationsverfahren vorgestellt, das eine Approximation und in bestimmten Fällen die Lösung des Cauchy–Problems für die Laplacegleichung liefert. Die allgemeine Formulierung des Verfahrens wird analysiert sowie die Anwendung auf die drei speziellen Probleme von Kapitel 2 betrachtet. Die Konvergenz des Verfahrens wird bewiesen und andere Eigenschaften wie Konvergenzgeschwindigkeit und Regularisierungsschema werden untersucht.

In Abschnitt 3.1 wird das Verfahren für allgemeine glatte Gebiete formuliert und als die Iteration eines affinen Operators T auf $H^{-1/2}$ betrachtet. Für die Probleme (CP b) und (CP c) werden wir mit Hilfe eines Fourierreihen–Ansatzes für die Cauchydaten die Iteration analytisch hinschreiben.

In Abschnitt 3.2 wird der Konvergenzbeweis für das Verfahren durchgeführt und einige Eigenschaften des Operators T , wie Positivität und Selbstadjungiertheit, werden überprüft. Für die Probleme (CP b) und (CP c) wird die Spektraldarstellung von T abgeleitet und die Konvergenzgeschwindigkeit damit analysiert. Schließlich betrachten wir Cauchy-Probleme mit fehlerhaften Daten und ermitteln Regularisierungstechniken, die uns erlauben, solche Situationen zu beherrschen.

3.1 Beschreibung des Verfahrens

Hier wird das Iterationsverfahren vorgestellt, und die Anwendung auf die speziellen Probleme von Kapitel 2 wird im Detail diskutiert.

3.1.1 Allgemeine Formulierung

Sei Ω ein offenes beschränktes Gebiet in \mathbb{R}^2 mit glattem Rand $\partial\Omega$, der in zwei offene Komponenten Γ_1 und Γ_2 zerlegt sei, so daß $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ und $\overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} = \partial\Omega$ gilt. Zu Daten $f \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ und $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ suchen wir die Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von

$$(CP) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ in } \Omega \\ u = f & , \text{ auf } \Gamma_1 \\ u_\nu = g & , \text{ auf } \Gamma_1 \end{cases} .$$

Es wird versucht, die Neumannspur der Lösung u auf dem Randstück Γ_2 zu rekonstruieren. Die Lösung u ist als Lösung einer Randwertaufgabe zu finden, wenn ihre Neumann-Spur auf Γ_2 bekannt ist. Nehmen wir an, wir verfügen über irgendeine Approximation $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ für $\gamma_2 u_{\nu_2}$. Die Idee des Verfahrens ist, diese Approximation folgendermaßen zu verbessern:

Skizze:

- Erster Schritt: Zuerst löst man das gemischte Problem für die Laplacegleichung mit Randdaten f bzw. φ auf Γ_1 bzw. Γ_2 . Die Dirichlet-Spur dieser Lösung auf Γ_2 nennen wir ψ .
- Zweiter Schritt: Dann löst man das gemischte Problem für die Laplacegleichung mit Randdaten g bzw. ψ auf Γ_1 bzw. Γ_2 . Die Neumann-Spur dieser Lösung auf Γ_2 nennen wir nun φ_1 .

Es ist zu erwarten, daß φ_1 eine bessere Approximation als φ für $\gamma_2 u_{\nu_2}$ sein wird, denn in φ_1 wurden weitere Informationen über die Cauchydaten von u auf Γ_1 eingefügt. Wird durch diese Prozedur aus φ_1 ein φ_2 erzeugt, ist es immer noch plausibel zu denken, daß der Einfluß der Cauchydaten auf φ_2 noch größer als auf φ_1 sein wird. Dies ist die heuristische Motivation des Verfahrens.

Bemerkung 3.1.1 Falls $\varphi = \gamma_2 u_{\nu_2}$ die Neumann-Spur der Lösung von (CP) ist, dann ist $\varphi_1 = \varphi$. In der Tat, es folgt aus Satz B.3.3, daß u die Lösung des gemischten Problems des ersten Schrittes ist und nach der Skizze $\psi = \gamma_2 u$ gilt. Aus demselben Argument folgt, daß die Lösung des gemischten Problems des zweiten Schrittes wieder u ist, und die Behauptung ist bewiesen.

Wir können nun aus dieser Idee das Verfahren formal definieren. Gegeben sei ein beliebiges Element φ_0 in $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$, dann erzeugen wir die Folge $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ durch die Iteration:

$$(IT) \quad \begin{cases} w \in H^1(\Omega) \text{ löst: } \Delta w = 0; & w|_{\Gamma_1} = f; & w_\nu|_{\Gamma_2} = \varphi_k; \\ \psi_k := w|_{\Gamma_2}; \\ v \in H^1(\Omega) \text{ löst: } \Delta v = 0; & v_\nu|_{\Gamma_1} = g; & v|_{\Gamma_2} = \psi_k; \\ \varphi_{k+1} := v_\nu|_{\Gamma_2}. \end{cases}$$

In (IT) werden zwei Differentialgleichungen gelöst und zwei Spuoperatoren angewendet. Wir erzeugen dadurch zwei Folgen, nämlich eine von Dirichletspuren und eine andere von

Neumannspuren, beide auf Γ_2 definiert. Da die harmonischen Funktionen w und v in $H^1(\Omega)$ sind, folgt aus Spursatz B.1.6, daß $\{\varphi_k\}$ in $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)'$ liegt. Andererseits folgt aus Korollar B.1.4, daß die Folge der Dirichletdaten $\{\psi_k\}$ in $H^{1/2}(\Gamma_2)$ definiert ist.

Bemerkung 3.1.2 Falls die Neumanndaten des Cauchy-Problems höhere Regularität besitzen, nämlich falls $g \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$ ist, dann impliziert der Satz B.2.5, daß die Folge $\{\varphi_k\}$ in $H^{-1/2}(\Gamma_2)$ liegt.

Bemerkung 3.1.3 Eine weitere Bemerkung bezieht sich auf die Überbestimmung der Daten. Falls $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ist und wir ein Cauchy-Problem mit Daten auf Γ_1 plus eine weitere Randbedingung (Neumann, Dirichlet, ...) auf Γ_3 betrachten, können wir das Verfahren wieder einsetzen, indem die neue Randbedingung auf Γ_3 in beiden Randwertaufgaben von (IT) berücksichtigt wird. Das ermöglicht uns, das Verfahren auch für das Problem (CP a) einzusetzen. Wir brauchen dafür nur Γ_1 bzw. Γ_2 bzw. Γ_3 durch Γ_l bzw. Γ_r bzw. Γ_i zu ersetzen.

Unser nächstes Ziel lautet, den Iterationsschritt von (IT) für das Problem (CP a) durch die Anwendung eines Operators T auf $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ zu repräsentieren. Dafür machen wir die Vereinfachungsannahme $g \equiv 0^1$ und definieren die Operatoren $L_n : H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)' \rightarrow H^1(\Omega)$ und $L_d : H^{1/2}(\Gamma_r) \rightarrow H^1(\Omega)$ durch:

$$L_n(\varphi) := w \in H^1(\Omega) \quad \text{bzw.} \quad L_d(\psi) := v \in H^1(\Omega),$$

wobei die Funktionen w bzw. v die Randwertaufgabe

$$\Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega; \quad w|_{\Gamma_l} = f; \quad w_\nu|_{\Gamma_r} = \varphi; \quad w_\nu|_{\Gamma_i} = 0$$

bzw.

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } \Omega; \quad v_\nu|_{\Gamma_l} = 0; \quad v|_{\Gamma_r} = \psi; \quad v_\nu|_{\Gamma_i} = 0$$

löst. Mit den Spur-Operatoren $\gamma_n : H^1(\Omega) \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ und $\gamma_d : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_r)$ können wir (IT) als

$$\begin{cases} w = L_n(\varphi_k); & \psi_k = \gamma_d(w) \\ v = L_d(\psi_k); & \varphi_{k+1} = \gamma_n(v) \end{cases} \quad (3.1)$$

umschreiben. Wir setzen $T := \gamma_n \circ L_d \circ \gamma_d \circ L_n$. Offensichtlich ist T eine affine Abbildung auf $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ und, nach Definition von (IT) erhalten wir

$$\varphi_{k+1} = T(\varphi_k) = T^{k+1}(\varphi_0).$$

¹Das entspricht der in 2.1 beschriebenen physikalischen Situation.

Das heißt, wir sind in der Lage, die Iteration (IT) durch Potenzen eines Operators darzustellen. Der nächste Schritt ist, T in einen linearen Anteil T_l und einen konstanten, nur von f abhängigen Term $z_f \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ zu zerlegen. Um T_l darzustellen, spalten wir die Funktion w in (3.1) in $w = w^l + w^a$, wobei die Funktionen w^l bzw. w^a Lösung der Randwertaufgabe

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w^l = 0 \\ w^l|_{\Gamma_l} = 0 \\ w^l_{\nu}|_{\Gamma_r} = \varphi \\ w^l_{\nu}|_{\Gamma_i} = 0 \end{array} \right. , \text{ in } \Omega \quad \text{bzw.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta w^a = 0 \\ w^a|_{\Gamma_l} = f \\ w^a_{\nu}|_{\Gamma_r} = 0 \\ w^a_{\nu}|_{\Gamma_i} = 0 \end{array} \right. , \text{ in } \Omega$$

ist. Man setzt $L_n^l : H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)' \rightarrow H^1(\Omega)$, $L_n^l(\varphi) := w^l$. Dann dürfen wir den Operator L_n in $L_n(\cdot) = L_n^l(\cdot) + w^a$ zerlegen, und die Iteration in (3.1) kann als

$$\varphi_{k+1} = T(\varphi_k) = \underbrace{\gamma_n \circ L_d \circ \gamma_d \circ L_n^l(\varphi_k)}_{T_l(\varphi_k)} + \underbrace{\gamma_n \circ L_d \circ \gamma_d(w^a)}_{z_f} \quad (3.2)$$

$$= T_l^{k+1}(\varphi_0) + \sum_{j=0}^k T_l^j(z_f) \quad (3.3)$$

geschrieben werden.

Bemerkung 3.1.4 Aus Bemerkung 3.1.1 und aus (3.2) folgt, daß die Funktion $\bar{\varphi} = \gamma_n u$ (u Lösung des Cauchy-Problems (CP a)) eine Lösung der Fixpunktgleichung $T\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$ ist.

Andererseits, wenn $\bar{\varphi}$ eine Lösung der Fixpunktgleichung $T\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$ ist, dann besitzen die Funktionen w und v in (3.1) dieselben Cauchydaten auf Γ_r und sind wegen des Eindeutigkeitssatzes 2.4.6 gleich. Die Definition von w und v in (3.1) impliziert, daß $w = v$ eine Lösung des Cauchy-Problems ist.

Bemerkung 3.1.5 Wir könnten die Iteration (IT) mit einer Anfangsnäherung für die Dirichletdaten statt für die Neumanndaten starten. In diesem Fall müßten wir lediglich das v -Problem vor dem w -Problem in (3.1) lösen. Der zugehörige Operator $T : H^{1/2}(\Gamma_r) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_r)$ ließe sich analog definieren.

Bemerkung 3.1.6 Die überbestimmten Daten, die wir in der Iteration (IT) eingefügt haben, um das Problem (CP a) betrachten zu können, beeinflussen weder die Konvergenz des Verfahrens noch die Eigenschaften von T , die in Abschnitt 3.3 analysiert werden. Anzahl und der Typ dieser weiteren Randbedingungen sind harmlos, solange das Cauchy-Problem konsistent bleibt.

Bemerkung 3.1.7 Ohne die Annahme $g \equiv 0$ wäre es immer noch möglich, den Operator T wie in (3.3) umzuschreiben. Wir müßten nur die H^1 -Funktion \tilde{w}^a als die Lösung von

$$\Delta \tilde{w}^a = 0 \quad \text{in } \Omega; \quad \tilde{w}_\nu^a|_{\Gamma_l} = g; \quad \tilde{w}|_{\Gamma_r} = 0; \quad \tilde{w}_\nu^a|_{\Gamma_i} = 0;$$

definieren. Der Operator T ließe sich dann darstellen als

$$T(\cdot) = \underbrace{\gamma_n \circ L_d \circ \gamma_d \circ L_n^l(\cdot)}_{T_l(\cdot)} + \underbrace{\gamma_n \circ L_d \circ \gamma_d(w^a) + \gamma_n(\tilde{w}^a)}_{z_{f,g}}.$$

3.1.2 Das Verfahren in der Rechteckgeometrie

In diesem Abschnitt werden wir die Anwendung der Iteration (IT) auf das spezielle Problem in Abschnitt 2.2 diskutieren. Gesucht ist die Lösung des Cauchy-Problems

$$(CP \ b) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ in } \Omega \\ u = f & , \text{ auf } \Gamma_l \\ u_\nu = g & , \text{ auf } \Gamma_l \\ u(x, \pm\pi) = 0 & , x \in (-\pi, \pi) \end{cases} ,$$

wobei $\Omega = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ ist. Zunächst wird angenommen, daß die Randdaten f und g eine Fourierreihenentwicklung vom Typ

$$f(y) = \sum_{j=1}^N a_j \sin(jy) \quad \text{und} \quad g(y) = \sum_{j=1}^N b_j \sin(jy); \quad (3.4)$$

haben.

Eine weitere Annahme ist die Existenz einer $H^1(\Omega)$ -Lösung des Problems (CP b) mit Daten (f, g) .

Wir fangen mit der Untersuchung der gemischten Probleme an, die in (3.1) vorkommen. Das erste ist das w -Problem

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & , \text{ in } \Omega \\ w = f & , \text{ auf } \Gamma_l \\ w_\nu = \varphi & , \text{ auf } \Gamma_r \\ w(x, \pm\pi) = 0 & , x \in (-\pi, \pi) \end{cases} .$$

Für die Neumannndaten $\varphi(y) = \sum_{j=1}^N \varphi_j \sin(jy)$, können wir die Lösung explizit hinschreiben. In der Tat, die Lösung w lautet

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^N \left(\varphi_k \frac{\sinh(k(x + \pi))}{k \cosh(2k\pi)} + a_k \frac{\cosh(k(x - \pi))}{\cosh(2k\pi)} \right) \sin(ky). \quad (3.5)$$

Ein analoges Ergebnis haben wir für das v -Problem

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & , \text{ in } \Omega \\ v_\nu = g & , \text{ auf } \Gamma_l \\ v = \psi & , \text{ auf } \Gamma_r \\ v(x, \pm\pi) = 0 & , x \in (-\pi, \pi) \end{cases}$$

mit Dirichletdaten $\psi(y) = \sum_{j=1}^N \psi_j \sin(jy)$. Die Lösung dieser Randwertaufgabe ist

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^N \left(\psi_k \frac{\cosh(k(x + \pi))}{\cosh(2k\pi)} + b_k \frac{\sinh(k(x - \pi))}{k \cosh(2k\pi)} \right) \sin(ky). \quad (3.6)$$

Aus den Lösungsdarstellungen in (3.5) und (3.6) können wir eine explizite Formel für den Operator T herleiten, nämlich

$$(T\varphi)(y) = \sum_{j=1}^N \left(\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)^2 \varphi_j + \left(\frac{j \alpha_j}{\beta_j^2} \right) a_j + \frac{1}{\beta_j} b_j \right) \sin(jy), \quad (3.7)$$

wobei $\alpha_j = \sinh(2j\pi)$ und $\beta_j = \cosh(2j\pi)$ sind. Wenn wir die Formel (3.7) iterieren, gewinnen wir eine Darstellung für die Folge $\{\varphi_k\}$ ähnlich der in (3.3). In der Tat, gegeben die Anfangsdaten $\varphi_0(y) = \sum_{j=1}^N \varphi_{0,j} \sin(jy)$, können wir das Element φ_k hinschreiben als

$$\varphi_k(y) = \sum_{j=1}^N \underbrace{\left[\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)^{2k} \varphi_{0,j} + \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)^{2l} \left(\frac{j \alpha_j}{\beta_j^2} a_j + \frac{1}{\beta_j} b_j \right) \right]}_{\varphi_{k,j}} \sin(jy).$$

Wir wollen einen Sobolev-Raum finden, in dem der Operator T explizit darstellbar ist. Da wir explizite Lösungen nur von Cauchy-Problemen mit periodischen Daten kennen, sollten wir die Cauchydaten in einem Raum von periodischen Funktionen wählen. Nehmen wir an, die Anfangsnäherung φ_0 liegt in $H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)$. Wenn $N = \infty$ in (3.4) ist und die Cauchydaten (f, g) in $H^{1/2}(\Gamma_l) \times H^{-1/2}(\Gamma_l)$ liegen, dann besitzen die w - und v -Probleme zwar eindeutige H^1 -Lösungen, aber die Spuren davon sind nicht unbedingt periodisch. Damit $T\varphi_0 = v_\nu|_{\Gamma_r}$ in $H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)$ liegt, müssen wir stärkere Regularitätsbedingungen an f und g fordern.

Da die Gewichte α_j/β_j kleiner als eins für alle j sind, folgt aus der Gleichung (3.7), daß $T\varphi$ in $H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)$ liegt, falls

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{\alpha_j}{\beta_j^2} \right)^2 a_j^2 < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{1}{\beta_j^2} \right) b_j^2 < \infty \quad (3.8)$$

gilt. Die Gewichte α_j/β_j^2 und $1/\beta_j$ sind äquivalent² und die Konvergenz der beiden Reihen in (3.8) entspricht der Annahme, daß die Funktion f bzw. g zu dem Raum $H_{per}^{1/2}(\Gamma_l)$ bzw. $H_{per}^{-1/2}(\Gamma_l)$ mit dem exponentiellen Gewicht $1/\beta_j^2$ gehört.

Aus Gleichung (3.7) können wir eine explizite Darstellung auch für den linearen Anteil T_l von T ableiten. Es gilt

$$(T_l \varphi_0)(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)^2 \varphi_{0,j} \sin(jy). \quad (3.9)$$

Die Eigenwerte von T_l sind $\lambda_j = (\alpha_j/\beta_j)^2$ mit $\sin(jy)$ als zugehörige Eigenfunktion. Aus der Definition von $H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)$ als Spezialfall von

$$H_{per}^s((-\pi, \pi)) := \left\{ \varphi(y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{ijy} / \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1+j^2)^s c_j^2 < \infty \right\}, \quad s \in \mathbb{R}$$

schließt man, daß (3.9) nämlich die Spektraldarstellung von T_l auf dem Teilraum

$$H = \overline{\text{Span}\{\sin(jy), j \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_{H_{per}^{-1/2}}}$$

ist.

Bemerkung 3.1.8 *Aus der Spektraldarstellung von T_l können wir auf die Kompaktheit des Operators $(I - T_l)$ schließen. Die Selbstadjungiertheit von T_l folgt wieder aus der Spektraldarstellung, wenn wir den Hilbert-Raum $H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)$ mit dem inneren Produkt*

$$\ll \varphi, \phi \gg = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1+j^2)^{-1/2} \varphi_j \phi_j,$$

für $\varphi, \phi \in H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)$ betrachten.

²Damit meinen wir, daß es positive Konstante c_1 und c_2 gibt, so daß

$$c_1 \beta_j^2 \leq \frac{\alpha_j}{\beta_j^2} \leq c_2 \beta_j^2$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.

3.1.3 Das Verfahren für die Kreisringgeometrie

In diesem Abschnitt werden wir die Anwendung der Iteration (IT) auf das spezielle Problem in Abschnitt 2.3 diskutieren. Gesucht ist die Lösung des Cauchy-Problems

$$(CP \ c) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ in } \Omega \\ u = f & , \text{ auf } \Gamma_o \\ u_\nu = g & , \text{ auf } \Gamma_o \end{cases}$$

wobei Ω ein offener Ring mit inneren bzw. äußeren Radius r_0 bzw. 1, $0 < r_0 < 1$, ist. Wir nehmen an, daß die Cauchydaten f und g eine Fourierreihenentwicklung vom Typ

$$f(\theta) = f_0 + \sum_{j=1}^N \left(f_j^{(1)} \sin(j\theta) + f_j^{(2)} \cos(j\theta) \right)$$

und

$$g(\theta) = g_0 + \sum_{j=1}^N \left(g_j^{(1)} \sin(j\theta) + g_j^{(2)} \cos(j\theta) \right)$$

haben. Die Lösung dieses Cauchy-Problems wurde in (2.4) angegeben.

Wir fangen mit der Untersuchung der gemischten Probleme an, die in (3.1) vorkommen. Das erste ist das w -Problem

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & , \text{ in } \Omega \\ w = f & , \text{ auf } \Gamma_o \\ w_\nu = \varphi & , \text{ auf } \Gamma_i \end{cases}$$

Für die Neumanndaten $\varphi(\theta) = \varphi_0 + \sum_{j=1}^N [\varphi_j^{(1)} \sin(j\theta) + \varphi_j^{(2)} \cos(j\theta)]$, können wir die Lösung explizit hinschreiben. In der Tat, die Lösung w lautet

$$w(r, \theta) = \sum_{j=-N}^N \left(a_j r^j \sin(j\theta) + b_j r^j \cos(j\theta) \right) + s \ln(r) \quad (3.10)$$

mit Koeffizienten $s = -\varphi_0 r_0$,

$$a_j = \begin{cases} \frac{1}{r_0^{j+1} \alpha_j} f_j^{(1)} + \frac{1}{j \alpha_j} \varphi_j^{(1)} & , j > 0 \\ \frac{-1}{r_0^{1-j} \alpha_j} f_j^{(1)} + \frac{1}{j \alpha_j} \varphi_j^{(1)} & , j < 0 \\ 0 & , j = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad b_j = \begin{cases} \frac{1}{r_0^{j+1} \alpha_j} f_j^{(2)} + \frac{1}{j \alpha_j} \varphi_j^{(2)} & , j > 0 \\ \frac{1}{r_0^{1-j} \alpha_j} f_j^{(2)} - \frac{1}{j \alpha_j} \varphi_j^{(2)} & , j < 0 \\ f_0 & , j = 0 \end{cases} ,$$

wobei $\alpha_j = r_0^{j-1} + r_0^{-(j+1)}$ ist.

Dasselbe machen wir mit dem v -Problem

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & , \text{ in } \Omega \\ v_\nu = g & , \text{ auf } \Gamma_o \\ v = \psi & , \text{ auf } \Gamma_i \end{cases} .$$

Für die Dirichletdaten $\psi(\theta) = \psi_0 + \sum_{j=1}^N [\psi_j^{(1)} \sin(j\theta) + \psi_j^{(2)} \cos(j\theta)]$ hat das v -Problem die Lösung

$$v(r, \theta) = \sum_{j=-N}^N c_j r^j \sin(j\theta) + d_j r^j \cos(j\theta) + t \ln(r) \quad (3.11)$$

mit Koeffizienten $t = g_0$,

$$c_j = \begin{cases} \frac{1}{\beta_j} \psi_j^{(1)} + \frac{r_0^{-j}}{j\beta_j} g_j^{(1)} & , j > 0 \\ \frac{-1}{\beta_j} \psi_j^{(1)} + \frac{1}{jr_0^{-j}\beta_j} g_j^{(1)} & , j < 0 \\ 0 & , j = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad d_j = \begin{cases} \frac{1}{\beta_j} \psi_j^{(2)} + \frac{r_0^{-j}}{j\beta_j} g_j^{(2)} & , j > 0 \\ \frac{1}{\beta_j} \psi_j^{(2)} - \frac{1}{jr_0^{-j}\beta_j} g_j^{(2)} & , j < 0 \\ \psi_0 & , j = 0 \end{cases} ,$$

wobei $\beta_j = r_0^j + r_0^{-j}$ ist.

Aus den Lösungsdarstellungen in (3.10) und (3.11) ist es möglich, eine explizite Formel für den Operator T_l herzuleiten. Es gilt

$$(T_l \varphi)(\theta) = \sum_{j=1}^N \lambda_j [\varphi_j^{(1)} \sin(j\theta) + \varphi_j^{(2)} \cos(j\theta)], \quad (3.12)$$

wobei $\lambda_0 = 0$ und

$$\lambda_j = \left(\frac{r_0^{-(j+1)} - r_0^{j-1}}{r_0^{-(j+1)} + r_0^{j-1}} \right) \left(\frac{r_0^{-j} - r_0^j}{r_0^{-j} + r_0^j} \right), \quad j > 0 \quad (3.13)$$

die Eigenwerte von T_l sind.

Bemerkung 3.1.9 Analog zum vorherigen Abschnitt können wir den Operator T_l für Funktionen auf $H_{per}^{-1/2}((-\pi, \pi)) \subset H^{-1/2}(\Gamma_o)$ definieren. Man kann auch eine explizite Darstellung für den Operator T finden und wie in (3.8) Bedingungen für das Abklingen der Fourierkoeffizienten von f und g herleiten, die hinreichend sind, um die Inklusion $(T \varphi) \in H_{per}^{-1/2}((-\pi, \pi))$ zu garantieren.

Aus der Definition von $H_{per}^{-1/2}((-\pi, \pi))$ schließen wir, daß (3.12) die Spektraldarstellung von T_l auf

$$H = H_{per}^{-1/2}((-\pi, \pi))$$

ist. Aus dieser Spektraldarstellung von T_l folgt

- i) $\|T_l\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$;
- ii) T_l ist selbstadjungiert;
- iii) $(I - T_l)$ ist kompakt.

Bemerkung 3.1.10 Aus der Beschreibung der Eigenwerte von T_l in (3.13) schließt man, daß je größer der innere Radius r_0 ist, desto kontraktiver wird der Operator T_l .

Bemerkung 3.1.11 Die Analyse der Eigenwerte von T_l für die Probleme (CP b) und (CP c) weisen darauf hin, daß sie beide sehr ähnlich sind. In der Tat, die Eigenwerte der verschiedenen Operatoren T_l konvergieren exponentiell gegen 1.

3.2 Analyse des Verfahrens

3.2.1 Die Konvergenz

In diesem Abschnitt wird die Konvergenz des Iterationsverfahrens untersucht, falls die Cauchydaten konsistent sind. Es wird auch gezeigt, daß die Konvergenz der durch die Iteration (IT) erzeugten Folge die Existenz einer Lösung des Cauchy-Problems impliziert. Andere Eigenschaften wie Positivität und Selbstadjungiertheit von T_l werden auch untersucht.

Bevor wir mit der Untersuchung des Verfahrens anfangen, wird eine spezielle Topologie von $H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$ analysiert.

Lemma 3.2.1 Das Funktional $\|\varphi\|_* = (\int_{\Omega} |\nabla L_n^l(\varphi)|^2 dx)^{1/2}$ definiert auf $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ eine Norm, die äquivalent zu der üblichen Sobolev-Norm dieses Raums ist.

Beweis:

Sei $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ gegeben. $L_n^l(\varphi)$ löse folgende Randwertaufgabe:

$$\begin{cases} \Delta u & = 0 & , \text{ in } \Omega \\ u|_{\Gamma_l} & = 0 \\ u_\nu|_{\Gamma_r} & = \varphi \\ u_\nu|_{\Gamma_i} & = 0 \end{cases}$$

Wegen Satz B.3.3 ist $L_n^l(\varphi)$ die einzige Lösung in $H_0^1(\Omega \cup \Gamma_r)$ dieser Randwertaufgabe. Derselbe Satz garantiert auch die stetige Abhängigkeit der Lösung bezüglich der Randdaten, d.h.

$$\|\varphi\|_* \leq \|L_n^l(\varphi)\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'}$$

Die umgekehrte Ungleichung ist eine Konsequenz der Stetigkeit des Neumann–Spuroperators in Satz B.1.6 und der Poincaréschen Ungleichung B.3.2. ■

Bemerkung 3.2.2 *Eigentlich kann man zeigen, daß die Norm $\|\varphi\|_*$ aus einem inneren Produkt kommt und $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ ein Hilbertraum ist mit dem inneren Produkt*

$$\langle \varphi, \phi \rangle_* = \int_{\Omega} \nabla L_n^l(\varphi) \nabla L_n^l(\phi) dx.$$

Im nächsten Satz werden einige Eigenschaften des Operators T_l untersucht, indem wir den Raum $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ mit der durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ erzeugten Struktur betrachten.

Satz 3.2.3 *Sei $T_l \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)')$ die in (3.2) definierte Abbildung. Es gilt*

- i) T_l ist positiv, d.h. $\langle T_l \varphi, \varphi \rangle_* \geq 0 \quad \forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$;
- ii) 1 ist kein Eigenwert von T_l ;
- iii) T_l ist selbstadjungiert, d.h., $\langle T_l \varphi, \psi \rangle_* = \langle \varphi, T_l \psi \rangle_*$, $\forall \varphi, \psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$;
- iv) T_l ist injektiv.

Beweis:

i) Wir definieren den Operator $W : H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)' \rightarrow H^1(\Omega)$ durch

$$W(\varphi) := L_d \circ \gamma_d \circ L_n^l(\varphi).^3$$

Aus Satz B.2.3 und B.2.4 folgt für $\varphi, \psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\nabla L_n^l T_l(\varphi) - \nabla W(\varphi) \right) \nabla L_n^l(\psi) dx &= \\ - \int_{\Omega} \Delta \left(L_n^l T_l(\varphi) - W(\varphi) \right) L_n^l(\psi) dx + \int_{\Gamma_r \cup \Gamma_l} \left(L_n^l T_l(\varphi) - W(\varphi) \right)_{\nu} L_n^l(\psi) d\Gamma &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dasselbe Argument liefert

$$\int_{\Omega} \left(\nabla W(\varphi) - \nabla L_n^l(\varphi) \right) \nabla W(\psi) dx = 0. \quad (3.15)$$

³Für die Definition dieser Operatoren siehe Abschnitt 3.2.

Wenn wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das innere Produkt auf $L^2(\Omega)$ bezeichnen, folgt aus (3.14) und (3.15)

$$\begin{aligned} \langle T_l \varphi, \varphi \rangle_* &= \langle \nabla L_n^l T_l(\varphi), \nabla L_n^l(\varphi) \rangle \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \langle \nabla W(\varphi), \nabla L_n^l(\varphi) \rangle \\ &\stackrel{(3.15)}{=} \langle \nabla W(\varphi), \nabla W(\varphi) \rangle \\ &= \|\nabla W(\varphi)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$.

ii) Sei $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ mit $T_l \varphi = \varphi$. Setze $w := L_n^l(\varphi)$ und $v := L_d \circ \gamma_d \circ L_n^l(\varphi)$.⁴ Dann genügt die Differenz $v - w$ auf dem Randstück Γ_r

$$(v - w)|_{\Gamma_r} = (v - w)_\nu|_{\Gamma_r} = 0.$$

Der Eindeutigkeitsatz 2.4.6 garantiert die Gleichheit $v = w$. Andererseits gilt nach Definition von w und v

$$0 = w|_{\Gamma_l} \quad \text{und} \quad 0 = v_\nu|_{\Gamma_l} = w_\nu|_{\Gamma_l}.$$

Derselbe Eindeutigkeitschluß liefert $\varphi = 0$.

iii) Analog zu (3.14) und (3.15) zeigt man, daß für $\varphi, \psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ die Gleichungen

$$\langle \nabla L_n^l(\varphi), \nabla L_n^l T_l(\psi) \rangle = \langle \nabla L_n^l(\varphi), \nabla W(\psi) \rangle \quad (3.16)$$

und

$$\langle \nabla W(\varphi), \nabla W(\psi) \rangle = \langle \nabla W(\varphi), \nabla L_n^l(\psi) \rangle \quad (3.17)$$

gültig sind. Aus (3.14), ..., (3.17) folgt schließlich

$$\langle T_l \varphi, \psi \rangle_* = \langle \varphi, T_l \psi \rangle_* \quad \forall \varphi, \psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'.$$

iv) Sei φ_1 und φ_2 in $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ mit $T_l \varphi_1 = T_l \varphi_2$. Setze $w := L_n^l(\varphi_1 - \varphi_2)$ und $v := L_d \circ \gamma_d \circ L_n^l(\varphi_1 - \varphi_2)$. Die Definition von v und die Annahme $T_l(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ implizieren

$$v_\nu|_{\Gamma_l} = 0 \quad \text{und} \quad v_\nu|_{\Gamma_r} = 0.$$

Da v harmonisch in Ω ist, ist v konstant in Ω . Aus der Identität $v|_{\Gamma_r} = w|_{\Gamma_r}$ und da $w|_{\Gamma_r} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)$ folgt dann $v \equiv 0$.⁵ Deswegen verschwindet auch w identisch in Ω und daraus folgt $\varphi_1 = \varphi_2$. ■

⁴Siehe Gleichung (3.1).

⁵Die einzige konstante Funktion, die in $H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)$ liegt, ist die Nullfunktion.

Der nächste Schritt ist, die Konvergenz des Iterationsverfahrens zu beweisen. Wir fangen unsere Untersuchung mit einigen Definitionen aus Funktionalanalysis an.

Definition 3.2.4 Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Hilbert-Raum. Ein Operator $A : X \rightarrow X$ heißt asymptotisch regulär auf X , wenn für alle x aus X gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{k+1}(x) - A^k(x)\|_X = 0.$$

Definition 3.2.5 Sei X ein Hilbert-Raum. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ heißt nichtexpansiv auf X , falls

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$$

gilt.

Der nächste Satz zeigt, daß die Eigenschaften in Definitionen 3.2.4 und 3.2.5 hinreichend sind, um die Konvergenz einer Folge $\{A^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $x \in X$, zu beweisen.

Satz 3.2.6 Sei X ein Hilbert-Raum, $A \in \mathcal{L}(X)$ nichtexpansiv und Π^- die orthogonale Projektion von X auf $\text{Ker}(I - A)$. Dann sind äquivalent:

- i) $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k(x) = \Pi^-(x)$, $\forall x \in X$;
- ii) A ist asymptotisch regulär auf X .

Der erste Teil $i) \Rightarrow ii)$ ist klar; der zweite folgt aus der Hilbertraum-Struktur von X zusammen mit Hölder-Abschätzungen. Den vollständigen Beweis kann man in [Pi, S.162] finden. Ein ähnlicher Satz für (nicht unbedingt lineare) nichtexpansive Operatoren in Banach-Räumen ist in [Je, S.69] zu finden.

Der nächste Satz zeigt, daß der lineare Anteil T_l des Operators T in (IT) die Eigenschaften in Definitionen 3.2.4 und 3.2.5 aufweist.

Satz 3.2.7 Sei $T_l \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)')$ der in (3.2) definierte Operator. Dann gilt

- i) T_l ist asymptotisch regulär;
- ii) T_l ist nicht expansiv.

Beweis:

i) Wegen der Identität: $(T_l^{k+1}(\varphi) - T_l^k(\varphi)) = T_l^k(T_l - I)(\varphi)$, genügt es zu zeigen, daß $\lim_k T_l^k(\varphi) = 0, \forall \varphi \in Rg(T_l - I)$. Sei ψ ein Element aus $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ mit $(T_l - I)\psi = \varphi$. Wie in (3.1) können wir die Iteration $T_l^k(\psi)$ mit Hilfe von

$$\begin{cases} w_k^l(\psi) &= L_n^l(\gamma_n(v_{k-1}(\psi))), & k \geq 1 \\ v_k(\psi) &= L_d(\gamma_d(w_k^l(\psi))), & k \geq 0 \end{cases}, \quad (3.18)$$

und $w_0^l(\psi) = L_n^l(\psi)$ repräsentieren, wobei die Funktionen $w_k^l, v_k \in H^1(\Omega)$ harmonisch sind. Aus (3.18) folgt $w_k^l = 0 = (v_k)_\nu$ auf Γ_l , $(w_k^l)_\nu = (v_{k-1})_\nu$ und $v_k = w_k^l$ auf Γ_r . Aus diesen Identitäten und der Greenschen Formel B.2.3 kann man folgende Gleichungen herleiten:

$$\int_{\Omega} |\nabla v_k|^2 dx = \int_{\Gamma_r} (v_k)_\nu v_k d\Gamma, \quad \int_{\Omega} |\nabla w_k^l|^2 dx = \int_{\Gamma_r} (w_k^l)_\nu w_k^l d\Gamma,$$

$$\int_{\Omega} \nabla v_k \nabla w_k^l dx = \int_{\Gamma_r} w_k^l (v_k)_\nu d\Gamma, \quad \int_{\Omega} \nabla v_{k-1} \nabla w_k^l dx = \int_{\Gamma_r} w_k^l (v_{k-1})_\nu d\Gamma.$$

Die Anwendung der Greenschen Formel wird durch den Satz B.2.4 und die Definition von w_k^l und v_k garantiert. Aus den letzten Gleichungen folgt

$$\int_{\Omega} |\nabla(w_k^l - v_{k-1})|^2 dx = \int_{\Omega} (|\nabla v_{k-1}|^2 - |\nabla w_k^l|^2) dx, \quad (3.19)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla(v_k - w_k^l)|^2 dx = \int_{\Omega} (|\nabla w_k^l|^2 - |\nabla v_k|^2) dx. \quad (3.20)$$

Wegen der Definition von φ und ψ gilt $w_k^l(\varphi) = w_{k+1}^l(\psi) - w_k^l(\psi)$. Die Gleichungen (3.19) und (3.20) implizieren dann

$$\int_{\Omega} |\nabla w_k^l(\varphi)|^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} (|\nabla w_k^l(\psi)|^2 - |\nabla w_{k+1}^l(\psi)|^2) dx. \quad (3.21)$$

Eine andere Konsequenz von (3.19) und (3.20) ist, daß die Folge $\{\int |\nabla w_k^l(\psi)|^2 dx\}_k$ nicht wächst. Deswegen konvergiert die rechte Seite von (3.21) gegen Null für $k \rightarrow \infty$. Die Poincarésche Ungleichung B.3.2 garantiert die Konvergenz von $\|w_k^l(\varphi)\|_{H^1(\Omega)}$ gegen Null. Die Behauptung folgt nun aus der Identität $T_l^k(\varphi) = \gamma_n(w_k^l(\varphi))$.

ii) Für $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ setze $w := L_n^l(\varphi)$ und $v := L_d \circ \gamma_d \circ L_n^l(\varphi)$. Wir behaupten, es genügt, die Ungleichung

$$\langle T_l \varphi, T_l \varphi \rangle_* \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \quad (3.22)$$

zu zeigen. In der Tat folgt aus (3.22)

$$\begin{aligned} \|T_l \varphi\|_*^2 &\leq \int_{\Omega} \nabla v \nabla v \, dx = \int_{\Gamma_l \cup \Gamma_r} v_{\nu} v \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_l \cup \Gamma_r} v_{\nu} w \, d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla v \nabla w \, dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 \, dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Die Definition der Norm $\|\cdot\|_*$ impliziert nun

$$\|T_l \varphi\|_* \leq \left(\int_{\Omega} \nabla w \nabla w \, dx \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |\nabla L_n^l(\varphi)|^2 \, dx \right)^{1/2} = \|\varphi\|_*.$$

Wir zeigen nun die Gültigkeit der Gleichung (3.22). Diese folgt ohne weiteres aus folgender Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla L_n^l \gamma_n v|^2 \, dx &= \int_{\Gamma_l \cup \Gamma_r} (L_n^l \gamma_n v)_{\nu} (L_n^l \gamma_n v) \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_l} v_{\nu} (L_n^l \gamma_n v) \, d\Gamma = \int_{\Gamma_l \cup \Gamma_r} v_{\nu} (L_n^l \gamma_n v) \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} \nabla v \nabla L_n^l \gamma_n v \, dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla L_n^l \gamma_n v|^2 \, dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

■

Wir sind schließlich in der Lage, einen Konvergenzsatz für das Iterationsverfahren vorzustellen. Wir werden ohne Einschränkung den Satz für das Problem (CP a) formulieren.

Satz 3.2.8 *Seien T und T_l die Operatoren in (3.2). Wenn die Cauchydaten (f, g) konsistent sind, dann konvergiert die Folge $\varphi_k := T^k \varphi_0$ gegen die Neumannspur der Lösung von (CP a) auf Γ_r für alle Anfangsnäherungen $\varphi_0 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$.*

Beweis:

Es genügt zu zeigen, daß die Folge $T^k \varphi_0$ gegen den Fixpunkt $\bar{\varphi}$ des Operators T konvergiert.⁶ Setze $\varepsilon_k := \varphi_k - \bar{\varphi}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &= \varphi_{k+1} - \bar{\varphi} \\ &= T(\varphi_k) - T(\bar{\varphi}) \\ &= T_l(\varphi_k) + z_g - T_l(\bar{\varphi}) - z_g \\ &= T_l(\varepsilon_k). \end{aligned} \tag{3.23}$$

⁶Siehe Bemerkung 3.1.4.

Aus Satz 3.2.6 und 3.2.7 folgt die Konvergenz der Folge $\{\varepsilon_k\}$ gegen $\Pi^-(\varphi_0 - \bar{\varphi})$. Die Projektion verschwindet, da $\text{Ker}(I - T_l) = 0$ ist.⁷ Dann konvergiert $\{\varphi_k\}$ gegen $\bar{\varphi}$. ■

Bemerkung 3.2.9 *Ein anderer Weg, um die Konvergenz der Folge $\varphi_k := T^k \varphi_0$ zu beweisen, wurde von Bastay in seiner Dissertation [Bas S.21] benutzt. Wenn $T\varphi = T_l \varphi + z_{f,g}$ ist, T_l nichtexpansiv und selbstadjungiert ist, ± 1 keine Eigenwerte von T_l sind und die Fixpunktgleichung $T\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$ eine Lösung hat, dann kann er die Konvergenz der Folge φ_k gegen $\bar{\varphi}$ für $k \rightarrow \infty$ mit Hilfe eines Satzes von Krasnosel'skii et al. [Kra S.66] beweisen. In diesem Satz wird hauptsächlich die Spektraldarstellung des beschränkten und selbstadjungierten Operators T_l in der Konvergenzanalyse benutzt.*

Der letzte Satz dieses Abschnittes gibt uns ein Existenzkriterium für die Cauchy-Probleme.

Satz 3.2.10 *Seien die Daten $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_l) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$, und sei $\{\varphi_k\}$ die durch (IT) erzeugte Folge. Wenn die Folge φ_k konvergiert, dann besitzt das Problem (CP a) eine Lösung u und es gilt $u_{\nu|_{\Gamma_r}} = \bar{\varphi} = \lim \varphi_k$.*

Beweis:

Wenn ein $\bar{\varphi} \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ existiert mit $\varphi_k \rightarrow \bar{\varphi}$, dann gilt

$$T\bar{\varphi} = T(\lim_k \varphi_k) = \lim_k (T\varphi_k) = \lim_k \varphi_{k+1} = \bar{\varphi}.$$

Das heißt, $\bar{\varphi}$ ist ein Fixpunkt des Operators T . Dieselbe Argumentation wie in Bemerkung 3.1.4 garantiert die Existenz einer Lösung von (CP a). ■

3.2.2 Konvergenzgeschwindigkeit

In diesem Abschnitt machen wir Gebrauch von der Spektraldarstellung des Operators T_l für die Probleme (CP b) und (CP c), um Resultate über die Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsverfahrens herzuleiten.

Betrachten wir zuerst das Problem (CP b). Nehmen wir an, daß das Cauchy-Problem mit Daten (f, g) konsistent ist, und daß die Fourierkoeffizienten von f und g der Abfallbedingung in (3.8) genügen. Nach Formel (3.9) können wir die Potenzen des Operators T_l folgendermaßen schreiben:

$$(T_l^k \varphi_0)(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)^{2k} \varphi_{0,j} \sin(jy), \quad (3.24)$$

⁷Siehe Satz 3.2.3 (ii).

wobei $\alpha_j := \sinh(2j\pi)$, $\beta_j := \cosh(2j\pi)$ ist und die Funktion $\varphi_0 \in H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)$ sich als

$$\varphi_0(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{0,j} \sin(jy)$$

darstellen läßt. Die Gleichung (3.23) beschreibt das Wachstum des Iterationsfehlers $\varepsilon_j := \varphi_j - \bar{\varphi}$. Um die Konvergenzgeschwindigkeit zu messen, brauchen wir nur zu wissen, wie schnell die Folge $T_l^k \varepsilon_0$ gegen Null konvergiert. Aus (3.24) und der Definition des Hilbertraumes $H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)$ folgt

$$\|\varepsilon_k\|_{H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)}^2 \leq \sum_{j \geq 1} j^{-1} \left(\lambda_j^k \varepsilon_{0,j} \right)^2,$$

wobei $\lambda_j := \alpha_j / \beta_j$ ist. Wenn wir annehmen, daß die Anfangsnäherung φ_0 so gut ist, daß die höheren Frequenzen des Fehlers ε_0 für $j > J$ verschwinden, gewinnen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_k\|_{H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)}^2 &\leq \sum_{j \leq J} j^{-1} \left(\lambda_j^k \varepsilon_{0,j} \right)^2 \\ &\leq \lambda_J^{2k} \|\varepsilon_0\|_{H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)}^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Die vorherige Annahme ist in der Praxis unrealistisch. Viel natürlicher ist zu erwarten, daß der Anfangsfehler $\varepsilon_0 = \varphi_0 - \bar{\varphi}$ mehr Regularität als $H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)$ besitzt. Nehmen wir deswegen an, daß es eine Folge $\{c_j\} \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} c_j = \infty \quad \text{und} \quad \sum_{j \geq 1} j^{-1} c_j^2 \varepsilon_{0,j}^2 = M < \infty$$

existiert. Wir können dann den Fehler bei der k^{ten} -Iteration durch

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_k\|_{H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)}^2 &= \sum_{j \geq 1} j^{-1} \frac{c_j^2}{c_j^2} \left(\lambda_j^k \varepsilon_{0,j} \right)^2 \\ &\leq \lambda_J^{2k} \left(\frac{c_J}{c_1} \right)^2 \sum_{j \leq J} j^{-1} \varepsilon_{0,j}^2 + \frac{1}{c_J^2} \sum_{j > J} j^{-1} c_j^2 \underbrace{\lambda_j^{2k}}_{\leq 1} \varepsilon_{0,j}^2 \\ &\leq \lambda_J^{2k} \left(\frac{c_J}{c_1} \right)^2 \|\varepsilon_0\|_{H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)}^2 + \frac{M}{c_J^2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

abschätzen. Das nächste Beispiel zeigt, wie deutlich die Schlechtgestellttheit des Cauchy-Problems (CP b) sich in der Abschätzung (3.25) erkennen läßt.

Beispiel 3.2.11 Nehmen wir an, φ_0 ist eine sehr gute Approximation für $\bar{\varphi}$ und die erste der oberen Annahmen trifft für ein kleines J zu. Dann gilt die Abschätzung in (3.25) mit folgenden Werten von λ_j^{2k}

k	λ_1^{2k}	λ_2^{2k}
10^1	0.99972	0.9999999990
10^2	0.99721	0.9999999903
10^3	0.97248	0.9999999027
10^4	0.75654	0.9999990271
10^5	0.06142	0.9999902708
10^{10}	—	0.3779762320

Die Interpretation ist eindeutig: Sogar in der ausgezeichneten Situation, in der alle Frequenzen mit $j > 1$ im Anfangsfehler ε_0 nicht vorkommen, müssen wir 10^5 Iterationsschritte rechnen, bevor der Fehler kleiner als 6% des Anfangsfehlers wird.

Die Fehleranalyse des Problems (CP c) ist identisch mit der von (CP b). Der einzige Unterschied liegt in der Darstellung der Anfangsnäherung $\varphi_0 \in H_{per}^{-1/2}(\Gamma_r)$

$$\varphi_0(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\varphi_{0,j}^{(1)} \sin(j\theta) + \varphi_{0,j}^{(2)} \cos(j\theta) \right)$$

und in der Darstellung der Potenzen des Operators T_l

$$(T_l^k \varphi_0)(\theta) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^k [\varphi_{0,j}^{(1)} \sin(j\theta) + \varphi_{0,j}^{(2)} \cos(j\theta)],$$

wobei λ_j in (3.13) definiert ist.

Abschätzungen analog zu (3.25) und (3.26) können genauso wie vorher hergeleitet werden. Im nächsten Beispiel wird die Asymptotik der Eigenwerte im Falle beider Gebiete verglichen.

Beispiel 3.2.12 Nehmen wir an, wir haben wieder die Situation von Beispiel 3.2.11 jetzt aber auf der Kreisringgeometrie. Um den Fehler $\|\varphi_k - \bar{\varphi}\|$ abzuschätzen, haben wir die Ungleichungen (3.25) und (3.26) zur Verfügung, wobei λ_J die Eigenwerte von T_l auf der Kreisringgeometrie sind. In der folgenden Tabelle werden die Potenzen von λ_J für $J = 1, 2$ und verschiedene Radien r_0 gezeigt.

k	$r_0 = 0.5$		$r_0 = 0.1$	
	λ_1^{2k}	λ_2^{2k}	λ_1^{2k}	λ_2^{2k}
2	0.0167	0.3673	0.8521	0.9984
2^2	0.0002	0.1349	0.7261	0.9968
2^3	—	0.0182	0.5272	0.9936
2^4	—	0.0003	0.2780	0.9872
2^5	—	—	0.0772	0.9747
2^{12}	—	—	—	0.0377

Die Daten zeigen, daß der Unterschied zwischen der Rechteck- und der Kreisringgeometrien nur quantitativ ist. In beide Fällen konvergieren die Eigenwerte λ_j exponentiell gegen eins. Das Bild 3.1 zeigt die Asymptotik der Eigenwerte von T_l für beide Gebieten.

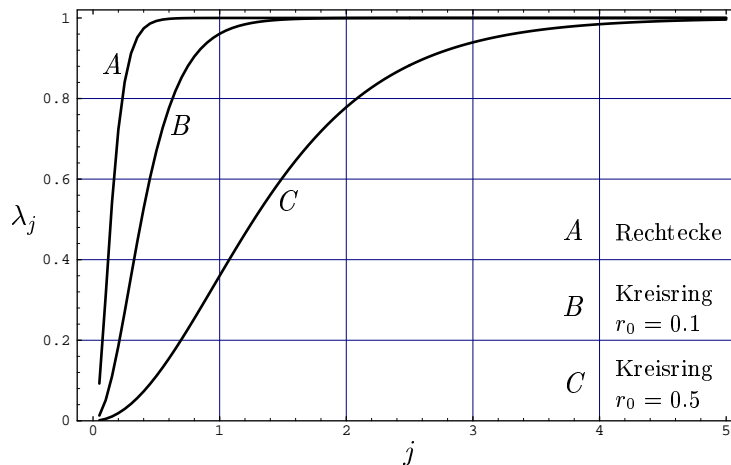


Bild 3.1

3.2.3 Regularisierung

In diesem Abschnitt wird das Cauchy–Problem mit fehlerhaften Daten betrachtet. Eine Approximation für die exakte Lösung des Cauchy–Problems wird durch die Lösung einer Fixpunktgleichung für den Operator T_{reg} hergeleitet, wobei der Operator T_{reg} den Operator T_l regularisiert.

Das Ziel der Regularisierung ist, einen Operator T_{reg} so zu wählen, daß die Iterationsfolge $\varphi_{k,\text{reg}} := T_{\text{reg}}^k \varphi_0 + z_{f,g}$ schneller konvergiert als die Folge $\varphi_k := T_l^k \varphi_0 + z_{f,g}$. Wir müssen dabei noch beachten, daß der Fehler $\|\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_{\text{reg}}\|$ klein bleibt, wobei $\bar{\varphi}$ bzw. $\bar{\varphi}_{\text{reg}}$ der Limes der Folge

$$\bar{\varphi} := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k \quad \text{bzw.} \quad \bar{\varphi}_{\text{reg}} := \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k,\text{reg}}$$

ist.⁸

Eine übliche Regularisierungsstrategie ist es die ersten (kleinsten) Eigenwerte von T_l zu nutzen, um den Operator T_{reg} zu definieren. Die Wirkung der anderen Eigenwerte wird entweder vergessen oder so gewichtet, daß der Einfluß davon in der Operation von T_{reg} nicht berücksichtigt werden muß. Die Konvergenz der Folge $\bar{\varphi}_{\text{reg}}$ hängt dann von dem größten in der Rekonstruktion benutzten Eigenwert ab. Wir benötigen für die Definition unserer Regularisierungsstrategie einige Kenntnisse über das Spektrum des Operators T_l .

Es wurde in Satz 3.2.3 bewiesen, daß T_l ein positiver selbstadjungierter Operator ist und sein Spektrum in $[0, 1]$ liegt. Diese Eigenschaften erlauben uns, Gebrauch von einem bekannten Satz der Funktionalanalysis zu machen, um eine Darstellung für den Operator T_l zu finden. Das ist nämlich

Satz 3.2.13 (Spektraldarstellung) *Sei T ein linearer beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbert-Raum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann existiert eine Familie von Operatoren $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft, daß jedes E_λ die orthogonale Projektion von H auf $\text{Ker}(T_\lambda^+)$ ist, wobei*

$$T_\lambda = (T - \lambda I) \quad \text{und} \quad T_\lambda^+ = \frac{1}{2} \left((T_\lambda^2)^{1/2} + T_\lambda \right).^9$$

Die Familie $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ heißt Spektralschar für den Operator T , und sie erlaubt uns den Operator T als

$$T = \int_{m^-}^M \lambda dE_\lambda.$$

darzustellen, wobei

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle T x, x \rangle \quad \text{und} \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle T x, x \rangle$$

ist. Weiter gilt für alle $x, y \in H$

$$\langle T x, y \rangle = \int_{m^-}^M \lambda d \langle E_\lambda x, y \rangle.$$

Der Satz und die Details über die Konstruktion der Spektralschar können in [Krg], [Ru1], [Wd] oder [Yo] gefunden werden. Die Spektralschar ist besonders interessant, weil sie eine

⁸Mehr über das Thema Regularisation kann man in [Bau], [Lo1] und [Ho] finden.

⁹Die positive Wurzel eines linearen beschränkten selbstadjungierten Operators B ist definiert als der positive Operator A (oder $B^{1/2}$), der

$$A^2 = B$$

genügt.

Charakterisierung des Spektrums eines linearen beschränkten selbstadjungierten Operator erlaubt. Das kann zusammengefaßt werden in

Satz 3.2.14 (Beschreibung des Spektrums) *Sei T ein linearer beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbert-Raum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ die entsprechende Spektralschar. Es gilt*

- i) λ_0 ist ein Eigenwert von T (d.h. $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$) genau dann, wenn die Abbildung $\lambda \mapsto E_\lambda$ unstetig in $\lambda = \lambda_0$ ist (d.h. $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0^-}$);*
- ii) λ_0 gehört zum kontinuierlichen Spektrum $\sigma_c(T)$ von T genau dann, wenn die Abbildung $\lambda \mapsto E_\lambda$ stetig in $\lambda = \lambda_0$ ist (d.h. $E_{\lambda_0} = E_{\lambda_0^-}$), aber nicht konstant in jeder reellen Umgebung von λ_0 ist;*
- iii) das residuale Spektrum $\sigma_r(T)$ von T ist leer;*
- iv) λ_0 gehört zur Resolventenmenge $\rho(T)$ von T genau dann, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so daß die Abbildung $\lambda \mapsto E_\lambda$ konstant im Intervall $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ ist.*

Mit Hilfe von Satz 3.2.14 können wir die Ergebnisse von Satz 3.2.3 über das Spektrum von T_l verschärfen. Dies ist festgehalten in

Satz 3.2.15 *Sei $T_l \in \mathcal{L}(H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)')$ der in (3.2) definierte Operator. Dann gehört 1 zum kontinuierlichen Spektrum $\sigma_c(T_l)$ von T_l .*

Beweis:

Sei I der Identitätsoperator auf $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$. Dann gilt $E_\lambda = I$, für $\lambda \geq 1$.¹⁰ Wegen Satz 3.2.14 genügt es zu zeigen, daß es für alle $\delta \in (0, 1)$ einen Eigenwert $\lambda_0 \in (\delta, 1)$ von T_l gibt.

Nehmen wir an, diese Eigenschaft sei nicht erfüllt, d.h. $\sigma_p(T_l) \subset [0, \delta]$. Dann ist T_l kontraktiv mit $\|T_l\| \leq \delta$. Seien $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_r) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ inkonsistente Daten für das Problem (CP a). Da T_l kontraktiv ist, ist die durch

$$\varphi_k = T^k \varphi = T_l^k \varphi_0 + \sum_{j=0}^{k-1} T_l^j z_{f,g}$$

definierte Folge $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$. Der Grenzwert $\bar{\varphi} = \lim_k \varphi_k$ ist eine Lösung der Fixpunktgleichung $T \bar{\varphi} = \bar{\varphi}$ und der Satz 3.2.10 garantiert die Lösbarkeit des Cauchy-Problems (CP a). Das widerspricht aber der Inkonsistenz der Daten (f, g) . ■

¹⁰Siehe Satz 3.2.3.

Korollar 3.2.16 *Aus den Sätzen 3.2.3 und 3.2.15 folgt*

$$\|T_l\| = 1.$$

Wir fangen nun mit der Definition und Analyse der Regularisierungsmethode an. Sei o.B.d.A. das Problem (CP a) mit Daten $(f_\varepsilon, g_\varepsilon)$ in $H^{1/2}(\Gamma_l) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$ betrachtet. Bekannt sei die Existenz von Funktionen $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_l) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$ mit

$$\|z_{f,g} - z_\varepsilon\|_{H^{1/2}(\Gamma_l)'} < \varepsilon,^{11}$$

für die das Cauchy–Problem (CP a) konsistent ist.

Es werden zwei Methoden vorgeschlagen, um den Operator T_l zu regularisieren. Die erste ist eine Abschneidemethode und die zweite wird mit Hilfe von ganzzahligen Potenzen von T_l definiert. Für $2 \leq n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$A_n := \int_0^{1-\frac{1}{n}} \lambda dE_\lambda \quad \text{und} \quad P_n := \int_0^1 (\lambda - \lambda^n) dE_\lambda.^{12} \quad (3.27)$$

Beide Operatoren in (3.27) sind positiv, selbstadjungiert und kontraktiv. In der Tat, $\|A_n\|$ und $\|P_n\|$ sind durch $1 - 1/n$ abschätzbar. Sei $T_{\text{reg}}^{(n)}$ einer der beiden Operatoren in (3.27). Wir definieren $\bar{\varphi}$ und $\varphi^{(n)}$ als die Fixpunkte von

$$\begin{cases} \bar{\varphi} &= T_l \bar{\varphi} + z_{f,g} \\ \varphi^{(n)} &= T_{\text{reg}}^{(n)} \varphi^{(n)} + z_\varepsilon. \end{cases}$$

Beide Fixpunkte existieren, da (f, g) konsistente Daten für das Problem (CP a) sind und da $T_{\text{reg}}^{(n)}$ kontraktiv ist.

Die exakte Lösung $\bar{\varphi}$ soll durch die Lösung der regularisierten Fixpunktgleichung $\varphi^{(n)}$ approximiert werden. Wir können die Differenz zwischen $\varphi^{(n)}$ und $\bar{\varphi}$ als

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)} - \bar{\varphi} &= T_l \bar{\varphi} + z_{f,g} - T_{\text{reg}}^{(n)} \varphi^{(n)} - z_\varepsilon \\ &= T_{\text{reg}}^{(n)} (\varphi^{(n)} - \bar{\varphi}) + (T_{\text{reg}}^{(n)} - T_l) \bar{\varphi} + z_{f,g} - z_\varepsilon \end{aligned}$$

umschreiben, und nun wird der Fehler bei der regularisierten Lösung durch

¹¹Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir z_ε statt $z_{f_\varepsilon, g_\varepsilon}$. Der affine Term $z_{f,g}$ wurde in Abschnitt 3.1 definiert.

¹²Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß die reellen Zahlen $1 - 1/n$ keine Eigenwerte von T_l sind.

$$\|\varphi^{(n)} - \bar{\varphi}\| \leq \|(I - T_{\text{reg}}^{(n)})^{-1} (T_{\text{reg}}^{(n)} - T_l) \bar{\varphi}\| + \varepsilon \|(I - T_{\text{reg}}^{(n)})^{-1}\| \quad (3.28)$$

abgeschätzt.

Im nächsten Satz wird die Ungleichung (3.28) für die Operatoren A_n und P_n untersucht.

Satz 3.2.17 *Wenn wir den Operator $T_{\text{reg}}^{(n)}$ durch die in (3.27) definierten Operatoren A_n bzw. P_n in (3.28) ersetzen, dann gilt*

$$\|(I - T_{\text{reg}}^{(n)})^{-1} (T_{\text{reg}}^{(n)} - T_l) \bar{\varphi}\| \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \|(I - T_{\text{reg}}^{(n)})^{-1}\| \rightarrow \infty \quad (3.29)$$

für $n \rightarrow \infty$.

Beweis:

i) Analysieren wir zuerst den Fall $T_{\text{reg}}^{(n)} = A_n$. Aus der Spektraldarstellung von T_l folgt

$$(I - A_n) = \int_0^{1-\frac{1}{n}} (1 - \lambda) dE_\lambda + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 dE_\lambda$$

und

$$(A_n - T_l) = - \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \lambda dE_\lambda.$$

Diese Gleichungen implizieren $\|(I - A_n)\varphi\| \geq 1/n \|\varphi\|$. Dann ist der Operator $(I - A_n)$ invertierbar. Weiter ist $(I - A_n)$ der Identitätsoperator auf $Rg(A_n - T_l)$. Daraus folgt

$$(I - A_n)^{-1}(A_n - T_l) = - \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \lambda dE_\lambda,$$

und der erste Term in (3.29) wird durch

$$\|(I - A_n)^{-1}(A_n - T_l)\bar{\varphi}\|^2 \leq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 d\langle E_\lambda \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \rangle \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$, abgeschätzt. Die Unbeschränktheit des zweiten Terms in (3.29) folgt aus der Spektraldarstellung von $(I - A_n)$. In der Tat impliziert diese Darstellung die Gleichung

$$\|(I - A_n)^{-1}\| = (1 - \Lambda(n))^{-1} \rightarrow \infty$$

für $n \rightarrow \infty$, wobei $\Lambda(n)$ der größte Eigenwert von T_l ist, der kleiner als $(1 - 1/n)$ ist.

ii) Sei nun $T_{\text{reg}}^{(n)} = P_n$. Für dieses Regularisationsschema gilt $(P_n - T_l) = -T_l^n$, und die Spektraldarstellung von T_l liefert

$$(I - P_n)^{-1} = \int_0^1 (1 + \lambda^n - \lambda)^{-1} dE_\lambda$$

und

$$(I - P_n)^{-1}(P_n - T_l) = \int_0^1 \frac{\lambda^n}{(1 + \lambda^n - \lambda)} dE_\lambda.$$

Um den ersten Term in (3.29) abzuschätzen, werden die Funktionen

$$\mu(n) := n^{\left(\frac{1}{1-n}\right)} \quad \text{und} \quad \delta(n) := 1 - \mu(n)$$

definiert, und die Spektraldarstellung von $(I - P_n)^{-1}(P_n - T_l)$ in

$$\underbrace{\int_0^{1-\delta(n)} \frac{\lambda^n}{(1 + \lambda^n - \lambda)} dE_\lambda}_{A_n} + \underbrace{\int_{1-\delta(n)}^1 \frac{\lambda^n}{(1 + \lambda^n - \lambda)} dE_\lambda}_{B_n}$$

aufgespalten. Aus der Konvergenz von

$$\mu^n(n) (1 + \mu^n(n) - \mu(n))^{-1} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$ folgt $\lim \|A_n\| = 0$. Die Konvergenz $\|B_n\| \rightarrow 0$ folgt aus der Ungleichung $0 < \lambda^n (1 + \lambda^n - \lambda)^{-1} \leq 1$, $\forall \lambda \in [1 - \delta(n), 1]$, $n \geq 2$. Wir haben dadurch bewiesen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - P_n)^{-1}(P_n - T_l)\bar{\varphi}\| = 0.$$

Für den letzten Term in (3.29) liefert uns die Spektraldarstellung von $(I - P_n)^{-1}$ die Gleichung

$$\|(I - P_n)^{-1}\| = (1 + \Upsilon^n(n) - \Upsilon(n))^{-1} \rightarrow \infty$$

für $n \rightarrow \infty$, wobei $\Upsilon(n)$ der größte Eigenwert von T_l ist, der kleiner als $\mu(n)$ ist. ■

Bemerkung 3.2.18 *Wir können den Satz 3.2.17 folgendermaßen interpretieren: Der Fehler bei der regularisierten Lösung in (3.28) läßt sich in die Summe von zwei Komponenten spalten:*

$$\|\varphi^{(n)} - \bar{\varphi}\| \leq \eta(n) + \kappa(n),$$

und das Verhältnis zwischen den Funktionen η und κ ist in etwa wie in Bild 3.1

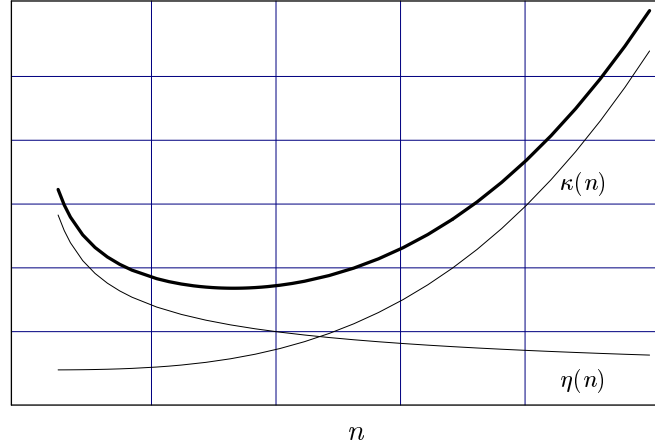


Bild 3.1

Bemerkung 3.2.19 Aus Satz 3.2.17 folgt, daß die in (3.27) definierten Operatoren A_n und P_n die Fixpunktgleichung $T\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$ regularisieren, d.h. für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existieren Funktionen

$$\tau(\varepsilon) : (0, \varepsilon_0) \mapsto \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad k(\varepsilon) : (0, \varepsilon_0) \mapsto \mathbb{N}_0,$$

so daß $\tau(\varepsilon) \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, und für alle z_ε mit $\|z_{f,g} - z_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ gilt die Abschätzung

$$\|\varphi^{(k(\varepsilon))} - \bar{\varphi}\| \leq \tau(\varepsilon).$$

In der Tat können wir $k(\varepsilon)$ als das größte $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\|(I - T_{\text{reg}}^{(n)})^{-1}\| \leq \varepsilon^{-1/2}$ definieren. Aus Satz 3.2.17 folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} k(\varepsilon) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(I - T_{\text{reg}}^{(k(\varepsilon))})^{-1}(T_{\text{reg}}^{(k(\varepsilon))} - T_l)\| = 0.$$

Die Ungleichung (3.28) liefert die Behauptung für $\tau(\varepsilon) = \|(I - T_{\text{reg}}^{(k(\varepsilon))})^{-1}(T_{\text{reg}}^{(k(\varepsilon))} - T_l)\| + \varepsilon^{1/2}$.

Der nächste Schritt ist, mit Hilfe von a priori-Kenntnissen über die Lösung $\bar{\varphi}$ der Fixpunktgleichung $T\varphi = \varphi$, eine optimale Regularisierungsstrategie zu finden. Wir fangen an mit einer Regularitätsannahme über $\bar{\varphi}$. Wir nehmen an, es existiert eine Funktion G mit

$$\left\{ \begin{array}{l} G : [0, 1) \mapsto \mathbb{R}^+ \text{ ist stetig und monoton wachsend;} \\ \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} G(\lambda) = \infty; \\ \int_0^1 G^2(\lambda) d\langle E_\lambda \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \rangle = M^2 < \infty. \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Der nächste Satz zeigt, daß die Annahme in (3.30) hinreichend ist, um die Funktionen $\eta(n)$ und $\kappa(n)$ in Bemerkung 3.2.18 auszubalancieren.

Satz 3.2.20 *Sei G eine Funktion, die den Bedingungen in (3.30) genügt und seien δ , μ , Λ und Υ die Funktionen im Beweis von Satz 3.2.17. Für die in (3.27) definierten Regularisierungsstrategien existiert ein $n_{\text{opt}} \in \mathbb{N}_0$, so daß*

$$\|\varphi^{(n_{\text{opt}})} - \bar{\varphi}\| \leq \|\varphi^{(n)} - \bar{\varphi}\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter gilt: n_{opt} ist die Lösung der Minimierungsaufgabe

$$\min_{n \geq 2} \left\{ \frac{M}{G(1 - \frac{1}{n})} + \frac{\varepsilon}{(1 - \Lambda(n))} \right\}$$

für die Regularisierung durch die Operatoren A_n und der Minimierungsaufgabe

$$\min_{n \geq 2} \left\{ \left(\frac{\mu^n(n) \|\bar{\varphi}\|}{1 + \mu^n(n) - \mu(n)} + \frac{M}{G(\mu(n))} \right) + \frac{\varepsilon}{(1 + \Upsilon^n(n) - \Upsilon(n))} \right\}$$

für die Regularisierung durch die Operatoren P_n .

Beweis:

Hier wird nur der Beweis für das durch die A_n definierte Regularisationsschema durchgeführt. Der Beweis für das P_n -Regularisationsschema ist völlig analog. Aus (3.30) und Satz 3.2.18 folgt

$$\begin{aligned} \|(I - A_n)^{-1}(A_n - T_l)\bar{\varphi}\|^2 &= \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \lambda^2 d\langle E_\lambda \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \rangle \\ &\leq \frac{1}{G^2(1 - \frac{1}{n})} \int_{1-\frac{1}{n}}^1 G^2(\lambda) d\langle E_\lambda \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \rangle \\ &\leq \frac{M^2}{G^2(1 - \frac{1}{n})}. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (3.28) und der Satz 3.2.18 liefern dann

$$\|\varphi^{(n)} - \bar{\varphi}\| \leq \frac{M}{G(1 - \frac{1}{n})} + \frac{\varepsilon}{(1 - \Lambda(n))},$$

und der Satz ist bewiesen. ■

Bemerkung 3.2.21 *Die Regularitätsbedingung für $\bar{\varphi}$ in (3.30) kann folgendermaßen interpretiert werden: Mit Hilfe der Funktion G definieren wir den unbeschränkten Operator*

$$\mathcal{G} = \int_0^1 G(\lambda) dE_\lambda$$

auf $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$. Die Beschränktheit des Integrals in (3.30) ist äquivalent zur Annahme, daß $\bar{\varphi}$ zum Definitionsgebiet $D(\mathcal{G})$ des Operators \mathcal{G} gehört, wobei

$$D(\mathcal{G}) := \left\{ \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)' / \mathcal{G}(\varphi) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)' \right\}$$

ist. $D(\mathcal{G})$ ist die Definition des Sobolev-Raumes $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ mit dem Gewicht G .

Bemerkung 3.2.22 Man kann auch zeigen, daß die Iteration (IT) die Fixpunktgleichung $T\varphi = \varphi$ regularisiert. Damit ist folgendes gemeint: Wenn φ_k die durch (IT) erzeugte Folge ist, dann existieren für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ Funktionen

$$\tau(\varepsilon) : (0, \varepsilon_0) \mapsto \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad k(\varepsilon) : (0, \varepsilon_0) \mapsto \mathbb{N}_0,$$

so daß $\tau(\varepsilon) \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, und für alle z_ε mit $\|z_{f,g} - z_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ gilt die Abschätzung

$$\|\varphi_{k(\varepsilon)} - \bar{\varphi}\| \leq \tau(\varepsilon).$$

Für Details siehe [Ma].

Kapitel 4

Die Backus-Gilbert-Methode

4.1 Die ursprüngliche Formulierung

1967 haben sich G.Backus und J.Gilbert [BaG1] mit dem Problem beschäftigt, eine unbekannte Funktion $f \in X = L_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, aus einer endlichen Menge von Daten $g \in \mathbb{R}^N = Y$ zu rekonstruieren. Die Motivation für dieses Problem kam aus der Geophysik und das mathematische Modell dafür wird in der Literatur als *Momentenproblem* bezeichnet¹.

Es wird angenommen, daß kein direkter Zugriff zu f möglich ist. Alle über f verfügbaren Informationen sind indirekt und kommen von Messungen eines Elements $g \in Y$, dessen Abhängigkeit von f sich durch die Gleichungen

$$g_i = \int_{\Omega} K_i(x) f(x) dx, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

beschreiben läßt. Die Kerne K_i sind gegebene reelle Funktionen auf Ω , die die Physik des Problems beschreiben. Wenn man das lineare Funktional $a_i(h) := \int_{\Omega} K_i h dx$, $h \in X$, definiert, kann (4.1) in Gestalt eines linearen Systems

$$A f = g \quad (4.2)$$

umgeschrieben werden, wobei der Operator $A : X \mapsto Y$ durch $Af := (a_1(f), \dots, a_N(f))^t$ definiert wird.

Die Idee der Backus-Gilbert Methode ist, die Lösung $f^* \in X$ von (4.2) punktweise zu rekonstruieren, d.h., für ein $x_0 \in \Omega$ versucht man, den Wert $f^*(x_0)$ zu bestimmen.² Um das zu erreichen, haben die Autoren vorgeschlagen, eine Approximation $f_N(x_0)$ für $f^*(x_0)$ durch

¹Siehe dafür [Gro3] oder [Krs].

²Unter der Annahme, daß $f^* \in L_2(\Omega)$ hinreichende Regularität besitzt.

ein lineares Funktional von g zu errechnen. Dafür wird der lineare Operator $R_N : Y \mapsto X$ durch

$$\begin{aligned} R_N(g) &:= \langle \varphi, g \rangle_Y = \int_{\Omega} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \varphi_i K_i(x) \right)}_{\phi_N(x)} f(x) dx \\ &= \langle \phi_N, f \rangle_X, \end{aligned}$$

definiert, wobei $\varphi \in Y$ und $\phi_N \in X$ sind.

Eine gute Approximation $f_N(x_0) := R_N(g)$ gewinnt man, wenn $\phi_N(\cdot) \simeq \delta(x_0 - \cdot)$ ist, die an dem Punkt x_0 zentrierte Dirac-Distribution. Backus und Gilbert haben versucht, diese Eigenschaft durch die Minimierung eines quadratischen Funktionals zu erzwingen. Sie haben das Funktional

$$J(\phi) := \int_{\Omega} |x_0 - x|^2 \phi^2(x) dx \quad (4.3)$$

definiert und $\phi_N \in \text{Span}\{K_i\} \subset X$ mit

$$J(\phi_N) = \min_{\phi \in \text{Span}\{K_i\}} J(\phi). \quad (4.4)$$

gewählt. Um die triviale Lösung zu vermeiden, wurde außerdem die lineare Bedingung

$$\int_{\Omega} \phi(x) dx = 1$$

berücksichtigt.

Nachdem die Funktion $\phi_N = \sum \varphi_i K_i(x)$ berechnet worden ist, kann man die gesuchte Approximation für $f(x_0)$ folgendermaßen bestimmen:

$$f_N(x_0) = R_N(g) = \langle \phi_N, f \rangle_X = \langle \varphi, g \rangle_Y,$$

wobei $\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^N$ ist. Diese Methode hat den Vorteil, daß die Lösung ϕ_N der Minimierungsaufgabe (4.4) nur von dem Punkt $x_0 \in \Omega$ abhängt und nicht von der rechten Seite des Systems (4.2).

Falls man für verschiedene rechte Seiten g die Lösung von (4.2) an der Stelle x_0 rekonstruieren will, ist es nur einmal nötig, das Funktional $R_N(\cdot) = \langle \varphi, \cdot \rangle_Y$ zu berechnen. Die Approximation für $f(x_0)$ bekommt man aus der Auswertung eines inneren Produkts in \mathbb{R}^N statt aus einer numerisch ungünstigen Lösung des Systems (4.2) für jede neue rechte Seite.

Die Minimierung des Straffunktionals in (4.3) wird in der Literatur *Peakedness Condition* genannt. Die Autoren waren damals an geophysikalischen Anwendungen interessiert, bei

denen die Gewichtsfunktion $|x - x_0|^2$ eine große Rolle spielt. Die Wahl der Gewichtsfunktion ist eine strikt modell-abhängige Frage.

Bemerkung 4.1.1 *Der Übergang zum kontinuierlichen Momentenproblem*

$$g(t) = \int_{\Omega} K(x, t) f(x) dx,$$

mit $Y = X = L^2(\Omega)$ ist nicht schwer nachzuvollziehen. Durch geeignete Diskretisierung der kontinuierlichen Gleichung gewinnt man ein Problem, das analog zu dem in (4.1) ist.

Unser eigentliches Ziel ist, die Strategie von Backus-Gilbert auf eine umfangreiche Klasse von (linearen und nichtlinearen) Operatoren anzuwenden und damit Informationen über die Lösung der auf Hilberträumen definierten Gleichung (4.2) zu gewinnen.

4.2 Die funktionalanalytische Formulierung

Wir fangen mit einer verallgemeinerten Formulierung für die in Abschnitt 4.1 betrachtete Aufgabe an.

Sei $V \hookrightarrow X \hookrightarrow V'$ ein Hilbertraum-Triple, Y ein Hilbertraum und sei $A : X \mapsto Y$ ein beschränkter linearer Operator. Wir betrachten das Problem, den Wert $\langle \mu, x^* \rangle$ des Funktionals $\mu \in V'$, angewendet auf $x^* \in X$, auszurechnen, wobei x^* die Lösung des Systems

$$A x = y \tag{4.5}$$

ist. Für die Aufgabe aus Abschnitt 4.1 könnten wir für $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ die Hilberträume folgendermaßen wählen: $V = H_0^1(\Omega)$, $X = L^2(\Omega)$ und $\mu = \delta \in V' = H^{-1}(\Omega)$.

Selbstverständlich muß der Ausdruck $\langle \mu, x^* \rangle$ ohne weitere Regularitätsannahme über x^* nicht definiert sein. Physikalische Argumente können aber in manchen Fällen die hinreichende Regularitätsbedingung $x^* \in V$ gewährleisten.

Wenn das mathematische Modell in (4.5) irgendeinen physikalischen Prozeß repräsentiert, ist es in der Praxis wegen auftretender Meßfehler oft interessant den Fall zu betrachten, daß $y \in Rg(A)$ nicht genau bekannt ist, sondern man nur über eine Approximation $y_\varepsilon \in Y$ mit $\|y - y_\varepsilon\|_Y \leq \varepsilon$ verfügt, wobei $\varepsilon > 0$ klein ist.

Wir nutzen die Backus-Gilbert Strategie und versuchen den Wert $f := \langle \mu, x^* \rangle_X$ durch ein lineares Funktional von y_ε zu approximieren. Für $\varphi \in Y'$ setzen wir $f_{\varepsilon, \varphi} := \langle \varphi, y_\varepsilon \rangle_Y$ und schätzen den Fehler $|f - f_{\varepsilon, \varphi}|$ durch

$$\begin{aligned} |f - f_{\varepsilon, \varphi}| &= | \langle \mu, x^* \rangle_X - \langle \varphi, y_\varepsilon \rangle_Y | \\ &\leq | \langle \varphi, y - y_\varepsilon \rangle_Y | + | \langle \mu, x^* \rangle_X - \langle \varphi, A x^* \rangle_Y | \\ &\leq \varepsilon \|\varphi\|_{Y'} + | \langle \mu - A^* \varphi, x^* \rangle_X | \end{aligned} \tag{4.6}$$

ab, wobei $A^* : Y \rightarrow X$ die Adjungierte von A ist.³ Wenn es uns gelingt, ein $\varphi \in Y'$ zu finden, das der Gleichung $A^*\varphi = \mu$ genügt, dann haben wir für den Wert f die Approximation

$$f = \langle A^* \varphi, x^* \rangle_X = \langle \varphi, y \rangle_Y \simeq \langle \varphi, y_\varepsilon \rangle_Y = f_{\varepsilon, \varphi}, \quad (4.7)$$

und der Fehler $|f - f_{\varepsilon, \varphi}|$ verhält sich wie $O(\varepsilon)$. Dies hat als Konsequenz, daß die Approximation $f_{\varepsilon, \varphi}$ exakt ist, falls es keinen Meßfehler gibt.

Hier erkennt man wieder den Vorteil, daß die Rechnung des Funktionals φ unabhängig von der rechten Seite des Systems (4.5) ist. Ähnlich wie beim endlichdimensionalen Momenten-Problem in Abschnitt 4.1 wird die Approximation $f_{\varepsilon, \varphi}$ in (4.7) von einem inneren Produkt in Y geliefert.

Sind speziell X und Y Funktionenräume auf einem Gebiet Ω , so liegt die Idee von Backus-Gilbert nahe, die Funktion $x^* \in V$ punktweise zu rekonstruieren, d.h. für $t \in \Omega$ soll der Wert $x^*(t)$ approximiert werden. Dafür wählen wir $\mu(\cdot) = \delta(t - \cdot)$ und lösen die adjungierte Gleichung $A^* \varphi = \delta$. Der Hilbert-Raum V soll so sein, daß δ in V' liegt.

Bemerkung 4.2.1 (Die Normalgleichung) Schwierigkeiten werden eintreten, wenn δ nicht in $\text{Rg}(A^*)$ liegt. In diesem Fall kann man statt δ seine Projektion auf $\text{Ker}(A)^{\perp}$ nutzen, um den Fehler $\|A^* \varphi - \delta\|_{V'}$ zu minimieren. Das heißt, gewählt wird ein $\varphi \in Y'$, das die Normalgleichung

$$(A A^*) \varphi = A \delta$$

löst. Einen analogen Weg haben Louis und Mass in [LoM1] betrachtet. Sie haben φ als Lösung der regularisierten Normalgleichung

$$(A A^*) \varphi = A e_h$$

genommen, wobei e_h ein Mollifier ist, d.h., eine glatte Approximation für die Dirac-Distribution δ . Wir kehren in Bemerkung 4.2.2 zu diesem Punkt zurück.

Eine andere Alternative wurde von Chavent [Ch] vorgeschlagen.⁴ Er versuchte die Normalgleichung $A A^* \varphi = A \delta$ mit einem Tikhonov-Verfahren zu regularisieren. φ wurde als Extremale des Funktionals $(\|A^* \varphi - \delta\|_{V'}^2 + \alpha \|\varphi\|_{Y'}^2)$ in Y' gewählt. Dazu muß man die Gleichung

$$(A A^* + \alpha I) \varphi = A \delta$$

lösen. Für Details über die Tikhonov-Methode siehe [Bau], [Gro2], [Ho], [Krs] oder [Lo1].

Bemerkung 4.2.2 (Die Mollifier-Alternative) Wir diskutieren hier den Vorschlag in [LoM1] (und später in [Lo2]), um die Normalgleichung zu regularisieren. Sei $E_h : X \mapsto X$, $h > 0$ eine Familie von Operatoren mit folgender Eigenschaft: Für alle $x \in X$ gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} E_h x = x.$$

³Hier haben wir X mit X' bzw. Y mit Y' identifiziert.

⁴Das ist auch in [Lo2] zu finden.

Hier spielt h die Rolle eines Regularisationsparameters. Um die Operatoren E_h einfach darzustellen, werden sie linear gewählt. Wir haben dann für die E_h den Ausdruck

$$(E_h x)(t) = \langle e_h(t, \cdot), x \rangle_X$$

benutzt, wobei die Mollifier e_h glatte Funktionen sind und die Bedingung $\int_{\Omega} e_{\rho}(t, s) ds = 1$ für alle $t \in \Omega$ erfüllen. Man löst nun die regularisierte Normalgleichung

$$AA^* \varphi_{h,t} = Ae_h(t, \cdot) \quad (4.8)$$

auf dem Teilraum $Y_h \subset Y$ mit $\dim Y_h = N$ so, daß $AA^* \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ist.

Wenn $\Pi : X \mapsto \text{Ker}(A)^{-}$ der orthogonale Projektor auf $\text{Ker}(A)^{-}$ ist, dann genügt $\varphi_{h,t}$ offensichtlich $A^* \varphi_{h,t} = \Pi e_h(t, \cdot)$. Die Approximation $x_h(t)$ für den Wert $x(t)$ wird durch

$$x_h(t) = E_h x(t) = \langle e_h(t, \cdot), x \rangle_X \simeq \langle A^* \varphi_{h,t}, x \rangle_X = \langle \varphi_{h,t}, y \rangle_Y$$

gegeben. Es wird auch vorgeschlagen, die Kerne $e_h(t, s) = e_h(t - s)$ zu wählen. Die inneren Produkte in der rechten Seite von (4.8) sind dann Faltungen, die durch den FFT-Algorithmus schnell gerechnet werden können.

Wir erweitern zunächst die Regularisierungsstrategie von Bemerkung 4.2.2 auf eine bestimmte Klasse von nichtlinearen Operatoren.

Die Backus-Gilbert Strategie kann im allgemeinen für Operatoren der Art $A = A_0 + \gamma A_1$ benutzt werden, wobei $A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist und $A_1 : X \mapsto Y$ stetig differenzierbar⁵ ist mit $\gamma > 0$ klein.

Sei $\mu \in V'$ und ein $y_{\varepsilon} \in Y$ wie vorher. Gegeben eine Näherung $x^0 \in V$ für die Lösung x^* von (4.5), wollen wir eine Approximation der Form $f_{\varepsilon, \varphi} = \langle \varphi, y_{\varepsilon} \rangle_Y$ für den Ausdruck $f := \langle \mu, x^* \rangle_X$ finden. Der Fehler $|f - f_{\varepsilon, \varphi}|$ ist abschätzbar durch

$$\begin{aligned} |f - f_{\varepsilon, \varphi}| &= |\langle \mu, x^* \rangle_X - \langle \varphi, y_{\varepsilon} \rangle_Y| \\ &\leq |\langle \varphi, y - y_{\varepsilon} \rangle_Y| + |\langle \varphi, Ax^* - Ax^0 - dA(x^0)(x^* - x^0) \rangle_Y| \\ &\quad + |\langle \varphi, Ax^0 - dA(x^0)x^0 \rangle_Y| + |\langle dA(x^0)^* \varphi - \mu, x^* \rangle_X|. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Um den Fehler in (4.9) zu analysieren, wählen wir einen endlichdimensionalen Raum $Y_h = \text{Span}\{y_j\}_{j=1}^N$ mit

$$Y_h \subset \{\varphi \in Y \mid \langle \varphi, Ax^0 - dA(x^0)x^0 \rangle_Y = 0\}.$$

Weiter setzen wir $P_h : Y \mapsto Y_h$ den orthogonalen Projektor auf Y_h und $X_h = \text{Span}\{x_j\}_{j=1}^N \subset D(A) \cap V$ einen endlichdimensionalen Hilbertraum mit

⁵Die Fréchetableitung von A_1 wird durch dA_1 repräsentiert.

$$\det(\langle dA(v)^* P_h^* y_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq N} \neq 0.^6 \quad (4.10)$$

Wenn wir $y_h := P_h y$ und $y_{\varepsilon, h} := P_h y_\varepsilon$ setzen, dann folgt aus (4.9) für $\varphi \in Y$

$$\begin{aligned} |f - f_{\varepsilon, \varphi}| &\leq \|\varphi\|_Y \|y_h - y_{\varepsilon, h}\|_Y \\ &\quad + \gamma \|\varphi\|_Y \|P_h A_1 x^* - P_h A_1 x^0 - P_h dA_1(x^0)(x^* - x^0)\|_Y \\ &\quad + |\langle \varphi, P_h A x^0 - P_h dA(x^0)x^0 \rangle_Y| \\ &\quad + |\langle dA^*(x^0)P_h^* \varphi - \mu, x^* \rangle_X|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die ersten zwei Terme von (4.11) haben wir im Griff. In der Tat, der erste Term wird durch

$$\|\varphi\|_Y \|y_h - y_{\varepsilon, h}\|_Y \leq \varepsilon \|P_n\| \|\varphi\|_Y$$

abgeschätzt und der zweite durch

$$\gamma \|\varphi\|_Y \|P_h A_1 x^* - P_h A_1 x^0 - P_h dA_1(x^0)(x^* - x^0)\|_Y \leq \gamma \|\varphi\|_Y \|P_n\| O(\|x^* - x^0\|_X^2)$$

abgeschätzt. Der dritte Term verschwindet wegen der Definition von Y_h . Aus dem letzten Term ergibt sich die Bedingung, die über die Wahl von $\varphi \in Y$ entscheiden wird, nämlich

$$\langle dA^*(x^0)P_h^* \varphi, x_j \rangle_X = \langle \mu, x_j \rangle_X, \quad j = 1 \dots N. \quad (4.12)$$

Dies ist ein N -dimensionales Gleichungssystem für die Koeffizienten von $P_h \varphi$ in Y_h . Das Problem ist wohl formuliert, da seine Determinante wegen (4.10) nicht verschwindet.

Wir können das System (4.12) anders darstellen. Nehmen wir an, der Raum X_h wird durch $X_h := B^* Y_h$ definiert, wobei $B : V' \mapsto Y$ und $B^* : Y \mapsto V$ lineare, beschränkte Operatoren sind. Der letzte Term von (4.11) liefert nun für $\varphi \in Y$ die Bedingung

$$\langle dA^*(x^0)P_h^* \varphi - \mu, B^* w \rangle_X = 0, \quad \forall w \in Y_h,$$

d.h.,

$$\langle BG_h \varphi, w \rangle_Y = \langle B\mu, w \rangle_Y, \quad \forall w \in Y_h, \quad (4.13)$$

wobei $G_h = dA^*(x^0)P_h^*$ ist.

Bemerkung 4.2.3 Wenn wir den Fall $\mu = \delta$ untersuchen wollen, muß B so gewählt werden, daß δ in $\text{Ker } B$ liegt. Dann können wir das System (4.13) einfach als

$$\langle BG_h \varphi, w \rangle_Y = 0, \quad \forall w \in Y_h$$

⁶Die Räume wurden so definiert, daß $\dim X_h = \dim Y_h = N$.

umschreiben. Falls die Zerlegung $BG_h = \mathcal{B}^2$ (in $\mathbb{R}^{N \times N}$) zulässig ist, kann die Aufgabe als

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathcal{B}\varphi_h\|^2 = \min_{\varphi \in \mathbb{R}^N} \|\mathcal{B}\varphi\|^2 \\ \text{unter der Nebenbedingung } \langle dA^*(x^0)\varphi_h, 1 \rangle_X = 1 \end{array} \right.$$

interpretiert werden. Das Ziel der Nebenbedingung ist, die triviale Lösung zu vermeiden. Diese Betrachtung liegt der ursprünglichen Formulierung von Backus und Gilbert in Abschnitt 4.1. sehr nahe.

Falls der Operator A linear ist, haben wir die Abschätzung (4.6) statt (4.11) für den Fehler $|f - f_{\varepsilon, \varphi}|$, und es gilt für $\varphi = \varphi_h \in Y_h$

$$|f - f_{\varepsilon, \varphi}| = O(\varepsilon) + |\langle A^*\varphi_h - \mu, x^* \rangle_X|.$$

Um diesen Fehler zu analysieren, setzen wir $B^* = A^*$, $X_h = A^*Y_h$ und $x_h := \mathcal{P}_h x^*$, wobei $\mathcal{P}_h : X \mapsto X_h$ der orthogonale Projektor auf X_h ist. Dann haben wir

$$\langle A^*\varphi_h - \mu, x^* \rangle_X = \langle A^*\varphi_h - \mu, x^* - x_h \rangle_X + \langle A^*\varphi_h - \mu, x_h \rangle_X \quad (4.14)$$

Der letzte Term in (4.14) verschwindet, da wir φ_h mit $A^*\varphi_h - \mu$ in X_h^- wählen können. Dann gilt die Abschätzung

$$|\langle A^*\varphi_h - \mu, x^* \rangle_X| \leq \|A^*\varphi_h - \mu\|_{V'} \|x^* - x_h\|_V.$$

Um den Term $\|x^* - x_h\|_V$ im Griff zu haben, definieren wir $\tilde{x} \in X_h$ durch die Minimierungsaufgabe

$$\|x^* - \tilde{x}\|_V^2 = \min_{x \in X_h} \|x^* - x\|_V^2,$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \|x^* - x_h\|_V &\leq \|x^* - \tilde{x}\|_V + \|\tilde{x} - \mathcal{P}_h x^*\|_V \\ &\leq \text{dist}(X_h, x^*)_V + \|\mathcal{P}_h(\tilde{x} - x^*)\|_V \\ &\leq (1 + \|\mathcal{P}_h\|) \text{dist}(X_h, x^*)_V. \end{aligned}$$

Die gesuchte Abschätzung für den Fehler $|f - f_{\varepsilon, \varphi}|$ im linearen Fall ist nun

$$|f - f_{\varepsilon, \varphi}| \leq \text{dist}(A^*Y_h, \mu)_{V'} (1 + \|\mathcal{P}_h\|) \text{dist}(X_h, x^*)_V + O(\varepsilon). \quad (4.15)$$

Aus 4.15 lernt man, daß erst, wenn $\delta \in \overline{\text{Rg } A^*}$ ist, der Fehler in der Approximation $f_{\varepsilon, \varphi}$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null konvergieren wird.

4.3 Anwendungen

4.3.1 Das Momentenproblem

Zuerst betrachten wir die Anwendung der Backus–Gilbert Methode auf ein nichtlineares Momentenproblem. Auch Louis hat sich in [Lo2] mit quadratischen nichtlinearen Momentenproblemen beschäftigt.

Sei $X = Y = L^2(0, 1)$. Wir definieren den nichtlinearen Operator $A : X \rightarrow Y$ durch

$$(Ax)(t) = \int_0^t x^0(t-s) x(s) ds + \nu \int_0^t x(t-s) x(s) ds, \quad t \in [0, 1],$$

wobei der Kern x^0 des linearen Anteils von A eine $L_2(0, 1)$ -Funktion ist und $\nu > 0$ ein reeller Parameter ist, der die Nichtlinearität von A kontrolliert. Der Operator A beschreibt eine mögliche nichtlineare Version des Momentenproblems in (4.1), deren kontinuierlichen Gestalt sich als

$$Ax = (A_0 + \nu A_1)x = y$$

umschreiben läßt.

Wie in Abschnitt 4.1 werden wir uns mit einer diskreten Formulierung dieses Problems beschäftigen. Wir nehmen an, daß nur die Daten $y_i = (Ax)(t_i)$, $t_i \in (0, 1)$ für $i = 1, \dots, N$ zur Verfügung stehen. Eine diskrete Version des Operators A kann mit Hilfe des Operators $P_h : Y \mapsto Y_h = \mathbb{R}^N$ definiert werden. Die lautet nämlich

$$(P_h A)(x) := [Ax(t_i)]^t = \left[\int_0^{t_i} x^0(t_i - s) x(s) ds + \nu \int_0^{t_i} x(t_i - s) x(s) ds \right]^t.$$

Hier werden Probleme mit fehlerhaften Daten betrachtet, d.h. bekannt ist nur ein $y_{h,\varepsilon} \in Y_h$ mit $\|P_h y - y_{h,\varepsilon}\| \leq \varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$ klein ist. Die Aufgabe, die sich uns stellt, ist, ein $x^* \in X$ zu finden, das die diskrete Gleichung

$$(P_h A)x^* = y_{h,\varepsilon}$$

löst.

Wie in Abschnitt 4.2 diskutiert wurde, brauchen wir eine Näherung für x^* . Dafür wird der Kern x^0 des linearen Anteils A_0 benutzt. Der Operator $P_h dA$ und seine Adjungierte $(P_h dA)^* : Y_h \mapsto X$ werden auch gebraucht. Für $f \in L_2(0, 1)$ und $w \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$(P_h dA(x))(f) = \left[\int_0^{t_i} x^0(t_i - s) f(s) ds + 2\nu \int_0^{t_i} x(t_i - s) f(s) ds \right]_{1 \leq i \leq N}^t$$

und

$$(P_h dA(x))^*(w) = \sum_{i=1}^N w_i [x^0(t_i - s) + 2\nu x(t_i - s)] \chi_{[0, t_i]}(s).$$

Wähle eine Basis $\{x_i\}_{i=1}^N$ von X_h . Diese Basis soll sowohl die Anwendung des Verfahrens optimieren als auch der erwarteten Regularität der Lösung x^* entsprechen.

Sei ein $\mu \in X'$ und die kanonische Basis $\{e_j\}$ von $Y_h = \mathbb{R}^N$ gegeben. Aus (4.13) folgt, daß wir folgendes adjungierte System lösen müssen:

$$\left[\langle (P_h dA(x^0))^* e_i, x_j \rangle_X \right]_{i,j=1}^N [\varphi_i]^t = [\langle \mu, x_j \rangle_X]^t. \quad (4.16)$$

Wenn wir kubische Splines als Basis für X_h nutzen, dann haben wir in (4.16) ein dünn besetztes Gleichungssystem. Der relativ kleine Träger der Splines wird ein System erzeugen, dessen Matrix eine obere Dreiecksmatrix ist, was numerisch günstig zu lösen ist. Die Splines liefern auch die von der Lösung erwartete Differenzierbarkeit.

Seien die Punkte t_j gleichmäßig verteilt im Intervall $[0, 1]$, d.h. $t_j = jh$, mit $h = 1/N$. Definiere für $j = 1, \dots, N$ den kubischen Spline

$$S_j(t) = \frac{1}{4h^3} \begin{cases} (t - t_{j-2})^3 & , t \in [t_{j-2}, t_{j-1}] \\ h^3 + 3h^2(t - t_{j-1}) + 3h(t - t_{j-1})^2 - 3(t - t_{j-1})^3 & , t \in [t_{j-1}, t_j] \\ h^3 + 3h^2(t_{j+1} - t) + 3h(t_{j+1} - t)^2 - 3(t_{j+1} - t)^3 & , t \in [t_j, t_{j+1}] \\ (t_{j+2} - t)^3 & , t \in [t_{j+1}, t_{j+2}] \end{cases}$$

Wir setzen $x_j := S_{j-1}$, $j = 1, \dots, N$, und definieren so den Raum X_h . Im Bild 4.1 wird der Spline-Basis für $N = 5$ gezeigt.

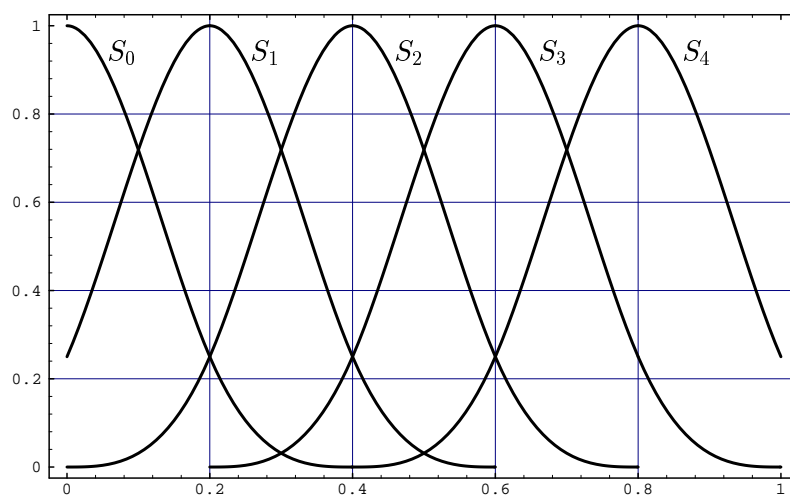


Bild 4.1

Der Raum Y_h in Abschnitt 4.2 wurde so gewählt, daß die Elemente $\varphi \in Y_h$ der Bedingung

$$\langle \varphi, P_h A_1(x^0) - dP_h A_1(x^0)x^0 \rangle_Y = 0 \quad (4.17)$$

genügen. Mit unserer Wahl von Y_h ist diese Bedingung aber mißachtet. Sie wird berücksichtigt, indem wir die Gleichung (4.17) zum System (4.16) hinzufügen. Dadurch gewinnen wir ein neues überbestimmtes System mit $N + 1$ Gleichungen.

Wir wollen eine punktweise Rekonstruktion durchführen, deswegen wird $\mu(t) = \delta(t_j - t)$ gewählt. Eine direkte Konsequenz davon ist, daß fast alle Koordinaten in der rechten Seite von (4.16) Null sind. Es gilt nämlich

$$(\langle \mu, x_j \rangle_X)^t = (0, \dots, 0, \frac{1}{4}, \underbrace{1}_j, \frac{1}{4}, 0, \dots, 0)^t.$$

Wir haben nun folgendes überbestimmte System zu lösen:

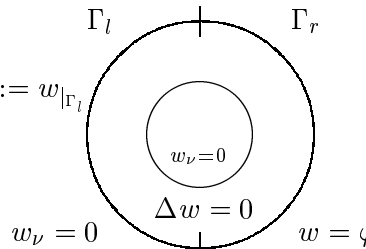
$$\begin{cases} \left[\int_0^1 [1 + 2\nu] x^0(t_i - s) \chi_{[0, t_i]}(s) S_j(s) ds \right]_{ij} [\varphi_j]^t = (\langle \mu, x_j \rangle_X)^t \\ \langle [P_h A_1(x^0) - P_h dA_1(x^0) x^0]^t, [\varphi_j]^t \rangle = 0 \end{cases},$$

wobei die Matrix-Koeffizienten D_{ij} Null für $i > j + 2$ sind. Dieses System kann für kleines N ohne weitere Schwierigkeiten durch irgendeine direkte Methode (z.B. das QR- oder LU-Verfahren) gelöst werden. Die numerische Simulationen in Kapitel 5 zeigen, daß für relativ kleines N ($N \leq 50$) schon gute Ergebnisse erzielt werden.

4.3.2 Das Cauchy-Problem

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Anwendung der Backus-Gilbert Methode auf die Cauchy-Probleme von Kapitel 2. Wir werden uns ohne Einschränkung auf das Problem (CP a) konzentrieren.

Um das Cauchyproblem durch die Backus-Gilbert Rekonstruktionsmethode betrachten zu können, wird das (CP a) durch eine Operatorgleichung modelliert. Wir nutzen die Notation von Kapitel 2 und definieren den Operator $A : H^{1/2}(\Gamma_r) \mapsto H^{1/2}(\Gamma_l)$ durch

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{in } \Omega \\ w = \varphi, & \text{auf } \Gamma_r \\ w_\nu = 0, & \text{auf } \Gamma_l \\ w_\nu = 0, & \text{auf } \Gamma_i \end{cases} \quad A(\varphi) := w|_{\Gamma_l}$$


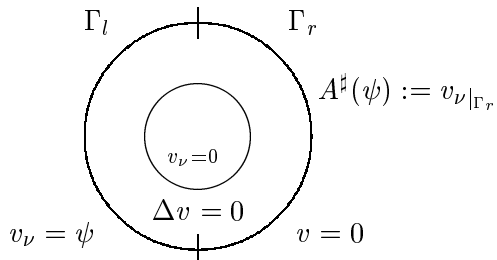
Eine Lösung für das Problem (CP a) mit Daten $(f, 0) \in H^{1/2}(\Gamma_l) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$ zu finden, ist äquivalent dazu, die lineare Gleichung

$$A\varphi = f$$

zu lösen. Für eine Distribution $\mu \in H^{-1/2}(\Gamma_r)$ liefert uns die Backus-Gilbert Strategie die Approximation $x_h := \langle \psi, f \rangle$ für den Wert $x := \langle \mu, \varphi \rangle$, wobei ψ durch

$$A^*\psi = \mu \quad (4.18)$$

definiert ist. Wir müssen nun den adjungierten Operator A^* von A bestimmen. Dafür definieren wir zuerst $A^\sharp : H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)' \mapsto H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ durch

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v = 0, \text{ in } \Omega \\ v = 0, \text{ auf } \Gamma_r \\ v_\nu = \psi, \text{ auf } \Gamma_l \\ v_\nu = 0, \text{ auf } \Gamma_i \end{array} \right.$$


Beide Operatoren A und A^\sharp sind wohl definiert, da Satz B.3.3 die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der entsprechenden gemischten Randwertaufgaben gewährleistet.

Nehmen wir an, daß $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)$ ist. Die $H^1(\Omega; \Delta)$ -Funktionen w und v genügen nun

$$\left\{ \begin{array}{l} w|_{\Gamma_r} = \varphi \\ w_\nu|_{\Gamma_l} = 0 \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} v|_{\Gamma_r} = 0 \\ v_\nu|_{\Gamma_l} = \psi \end{array} \right.$$

Aus den Sätzen B.2.4 und B.2.3 folgt

$$0 = - \int_{\Omega} \Delta w v \, dx = - \int_{\Gamma_r} w_\nu v \, d\Gamma - \int_{\Gamma_l} w_\nu v \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dx \quad (4.19)$$

und

$$0 = \int_{\Omega} \Delta v w \, dx = \int_{\Gamma_r} v_\nu w \, d\Gamma + \int_{\Gamma_l} v_\nu w \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla v \nabla w \, dx, \quad (4.20)$$

wobei die Randintegrale in (4.19) verschwinden. Wenn man die Gleichungen (4.19) und (4.20) addiert, folgt für alle $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)$ und $\psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$

$$\int_{\Gamma_l} A(\varphi) \psi \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_r} \varphi A^\sharp(\psi) \, d\Gamma.$$

Dies zeigt, daß A^\sharp die Adjungierte der Restriktion von A auf $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)$ ist.⁷ Um die Adjungierte von A zu bestimmen, brauchen wir

Satz 4.3.1 (Korrekturformel) Für reelle Zahlen a und b sei $\eta_{a,b}$ irgend eine $C^\infty(\Gamma_r)$ -Funktion mit $\eta_{a,b}(P_1) = a$ und $\eta_{a,b}(P_2) = b$, wobei $P_1 = (0, -1)$ und $P_2 = (0, 1)$ die Kontaktpunkte zwischen Γ_r und Γ_l sind. Sei $V_{a,b} \subset H^{1/2}(\Gamma_r)$ der Raum

$$V_{a,b} := \{ \varphi \in H^{1/2}(\Gamma_r) \mid \eta_{a,b} - \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r) \}.$$

Dann gilt für $\varphi_1, \varphi_2 \in V_{a,b}$:

$$\int_{\Gamma_l} A\varphi_1 \psi \, d\Gamma + \int_{\Gamma_r} \varphi_1 A^\sharp \psi \, d\Gamma = \int_{\Gamma_l} A\varphi_2 \psi \, d\Gamma + \int_{\Gamma_r} \varphi_2 A^\sharp \psi \, d\Gamma$$

für alle ψ in $H^{-1/2}(\Gamma_l)$.

Beweis:

Sei $\varphi_1, \varphi_2 \in V_{a,b}$. Aus der Definition von $V_{a,b}$ folgt

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1 - \eta_{a,b}) - (\varphi_2 - \eta_{a,b}) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r).$$

Für $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_l)$ sei w bzw. v die $H^1(\Omega; \Delta)$ Lösung von

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w = 0, \text{ in } \Omega \\ w = 0, \text{ auf } \Gamma_r \\ w_\nu = \psi, \text{ auf } \Gamma_l \\ w_\nu = 0, \text{ auf } \Gamma_i \end{array} \right. \quad \text{bzw.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta v = 0, \text{ in } \Omega \\ v = \varphi_1 - \varphi_2, \text{ auf } \Gamma_r \\ v_\nu = 0, \text{ auf } \Gamma_l \\ v_\nu = 0, \text{ auf } \Gamma_i \end{array} \right. .$$

Aus den Sätzen B.2.4 und B.2.3 folgt

$$0 = \int_{\Omega} \Delta w v \, dx = \int_{\Gamma_l} w_\nu v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_r} w_\nu v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dx$$

und

$$0 = \int_{\Omega} \Delta v w \, dx = - \int_{\Omega} \nabla v \nabla w \, dx.$$

Die letzten zwei Gleichungen liefern

⁷ Aus Satz B.2.4 folgt, daß der Operator A den Raum $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)$ nach $H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)$ abbildet.

$$\int_{\Gamma_l} \psi (A\varphi_1 - A\varphi_2) d\Gamma + \int_{\Gamma_r} A^\sharp \psi (\varphi_1 - \varphi_2) d\Gamma = 0,$$

und der Satz ist bewiesen. ■

Satz 4.3.1 ermöglicht uns die adjungierte Gleichung (4.18) so umzuschreiben, daß die Backus–Gilbert Methode angewendet werden kann. Wir definieren für $a, b \in \mathbb{R}$ das lineare Funktional

$$r_{a,b}(\psi) := \langle A\eta_{a,b}, \psi \rangle + \langle \eta_{a,b}, A^\sharp \psi \rangle$$

auf $H^{-1/2}(\Gamma_l)$. Aus Satz 4.3.1 folgt, daß für $\varphi \in V_{a,b}$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = - \langle \varphi, A^\sharp \psi \rangle + r_{a,b}(\psi), \quad \forall \psi \in H^{-1/2}(\Gamma_l)$$

gilt.

Wenn es uns gelingt, ein $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_l)$ zu finden, das die Gleichung

$$-A^\sharp \psi = \mu$$

löst, dann können wir durch

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \mu \rangle &= - \langle \varphi, A^\sharp \psi \rangle \\ &= \langle A\varphi, \psi \rangle - r_{a,b}(\psi) \\ &= \langle f, \psi \rangle - r_{a,b}(\psi) \end{aligned}$$

die Backus–Gilbert Strategie wieder anwenden, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\varphi \in V_{a,b}$ gewählt sind. Die Werte a bzw. b sind nämlich die Auswertung der Cauchydaten f auf den Kontaktpunkten P_1 bzw. P_2 .

Kapitel 5

Numerische Ergebnisse

Der erste Teil unserer numerischen Untersuchungen betrifft die Anwendung der Backus–Gilbert Methode auf das Momentenproblem von Abschnitt 4.3.1. In Abschnitt 5.1 werden Beispiele vorgestellt, um die Effizienz dieser Methode zu illustrieren. Wir werden sowohl lineare als auch nichtlineare Operatoren untersuchen und Probleme mit fehlerhaften Daten betrachten.

In Abschnitt 5.2 wird zunächst das Cauchy–Problem aus Kapitel 2 untersucht. Das Iterationsverfahren aus Kapitel 3 wird numerisch getestet, indem wir die gemischten Probleme durch die Methode der finiten Elemente lösen. Die Anwendung der Backus–Gilbert Strategie wird analysiert, indem die adjungierte Gleichung von Abschnitt 4.3.2 unter Berücksichtigung der Korrekturformel aus Satz 4.3.1 gelöst wird.

Die numerischen Codes wurden an einer Work–Station IBM RISC System/6000-250 (Rechengeschwindigkeit von 12.7 MFLOP's) ausgeführt. Die linearen Systeme von Abschnitt 5.1 wurden mit Hilfe der Faktorisierungsroutinen des Programm–Paketes ESSL (Engineering and Scientific Subroutine Library Release 4) gelöst.¹ Die numerischen Lösungen für die zweidimensionalen elliptischen gemischten Randwertaufgaben aus Abschnitt 5.2 wurden durch die Methode der finiten Elemente mit Hilfe des Programm–Paketes PLTMG Version 6.1 und 7.1 errechnet.²

5.1 Das nichtlineare Momentenproblem

Sei $A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ der nichtlineare Operator aus Abschnitt 4.3

$$(Ax)(t) = \int_0^t x^0(t-s) x(s) ds + \nu \int_0^t x(t-s) x(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad (5.1)$$

¹Siehe dafür [IBM].

²Für Details über das Programm–Paket siehe [Ban]. Die Literatur über die Methode der finiten Elementen ist umfangreich. Eine vollständige Formulierung dieser Methode kann man z.B. in [ChZh], [Od] oder [StFi] finden.

mit $x^0(t) = t$. Das erste Beispiel betrifft ein lineares Problem ($\nu = 0$), bei dem wir versuchen, $C^0(0, 1)$ - und $L^2(0, 1)$ -Funktionen punktweise zu rekonstruieren. Hier benutzen wir die Lösungsstrategie, die in Abschnitt 4.3.1 diskutiert wurde.

Beispiel 5.1.1 Wir lösen drei verschiedene Probleme für den Operator A und erzeugen die rechte Seite des Systems $Ax = y$, so daß wir als Lösung die Funktionen

$$x_a(t) = \begin{cases} t/2 & , t \leq 1/2 \\ t - \frac{1}{4} & , t \geq 1/2 \end{cases} , \quad x_b(t) = \begin{cases} 2t & , t \leq 1/2 \\ 2 - 2t & , t \geq 1/2 \end{cases}$$

bzw.

$$x_c(t) = \begin{cases} 1 & , \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

erhalten. Wir setzen $t_j = j/N, j = 0, \dots, N$ und definieren unsere B-Spline Basis wie in Abschnitt 4.3. Unseres Ziel ist, die Lösung jedes Systems sowohl an den Punkten t_j als auch an den Mittelpunkten $(t_{j+1} + t_j)/2, j = 0, \dots, N - 1$ zu rekonstruieren. Wir rekonstruieren jede Lösung in $2N + 1$ gleichmäßig verteilten Punkten des Intervalls $[0, 1]$, wobei für die Dimension N die Werte 6, 25 und 50 benutzt werden (siehe Bild 5.1).

Zuerst werden Daten ohne Fehler benutzt. Die Ergebnisse in Bild 5.1.a weisen darauf hin, daß der Fehler in der punktweise Rekonstruktion gegen null geht für alle Punkte, für N gegen Unendlich. In Bild 5.1.a erkennt man weiter, daß die Diskontinuität in den Ableitungen der Funktionen x_a und x_b die punktweise Rekonstruktion nicht qualitativ beeinflussen.

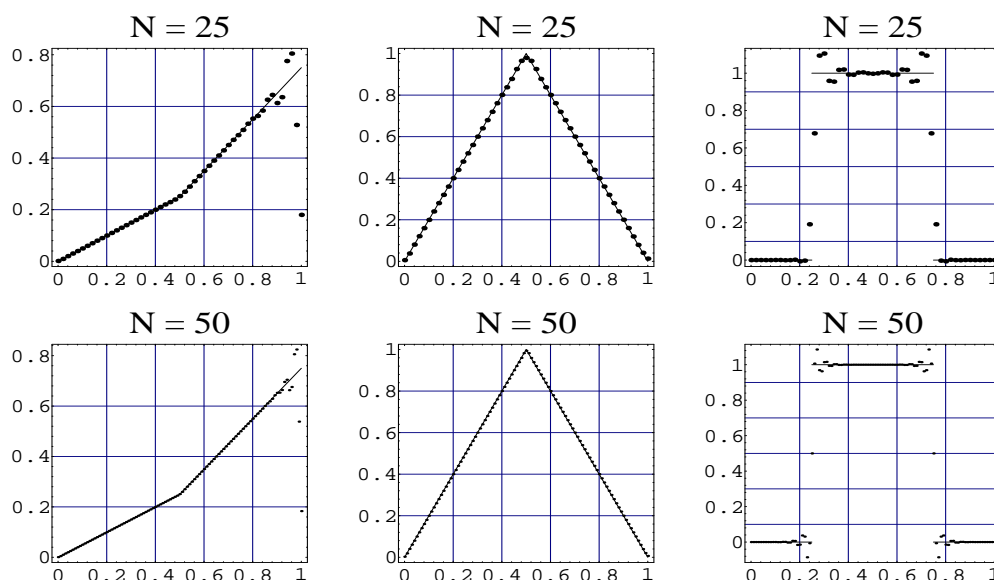


Bild 5.1.a

Nun nutzen wir Daten y_ε mit einem zufälligen Fehler von 1%, d.h. für $y = [y_j]^t =$

$[(Ax)(t_j)]^t \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$|y_j - y_{j,\varepsilon}| \leq \frac{1}{100} y_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

In dieser Situation stellen wir fest, daß die punktweise Rekonstruktion stark mit der Dimension oszilliert, und die beste Ergebnisse erreicht man, wenn die Dimension N klein ist (siehe Bild 5.1.b).

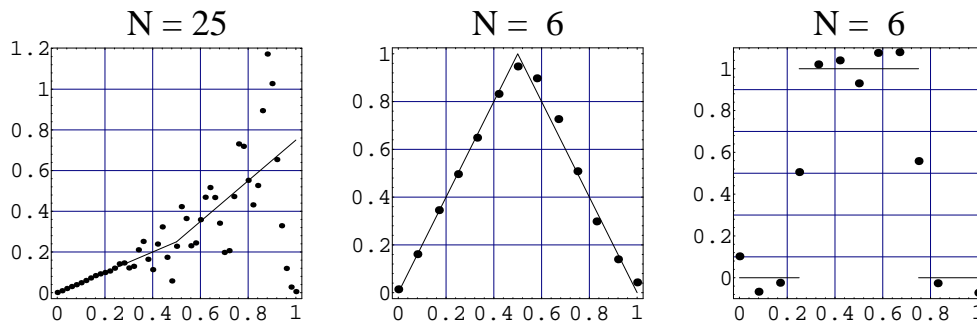


Bild 5.1.b

Nun untersuchen wir, wie der Fehler in der punktweise Rekonstruktion der Funktionen

$$x_a(t) = 2t \quad \text{und} \quad x_b(t) = \begin{cases} 2t & , t \leq 1/2 \\ 2 - 2t & , t \geq 1/2 \end{cases}$$

an der Stelle $t = 1/2$ sich verhält, wenn die Daten $y = Ax$ ohne Fehler gegeben sind. Der Fehler $|x(1/2) - x_N(1/2)|$ wird im Bild 5.2 in Abhängigkeit der Dimension N abgebildet. Das Ergebnis weist darauf hin, daß die Unstetigkeit in der Ableitung von x_b einen quantitativen Einfluß auf die Asymptotik des Fehlers hat.

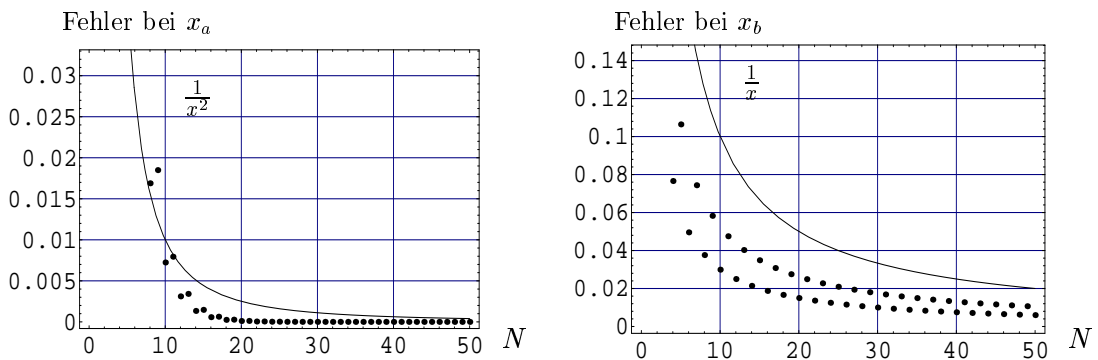


Bild 5.2

Im Bild 5.2 ist auch zu erkennen, daß für N gerade die Approximation etwas besser ist. Dies läßt sich damit erklären, daß für gerade Dimensionen es einen B-Spline gibt, der an dem Punkt $t = \frac{1}{2}$ zentriert ist, und deswegen wird das Funktional $\delta(\cdot - \frac{1}{2})$ in $\text{Rg}(A^*)$ besser approximiert.

Im nächsten Beispiel werden wir die Anwendung der Methode auf den nichtlinearen Operator A in (5.1) untersuchen, wobei die Konstante $\nu > 0$ klein gewählt wird.

Beispiel 5.1.2 Sei der Operator A wie in (5.1) definiert. Wir analysieren das System $Ax = y$, dessen Lösung das Polynom $x(t) = t^2$ ist. Die Daten y sind exakt genommen.

Wie in Beispiel 5.1.1, werden wir die Lösung an den $2N+1$ Punkte t_j und $(t_{j+1}+t_j)/2$ rekonstruieren. Die punktweise Rekonstruktion für verschiedene Werte von ν und $N = 25$ wird im Bild 5.3 gezeigt.

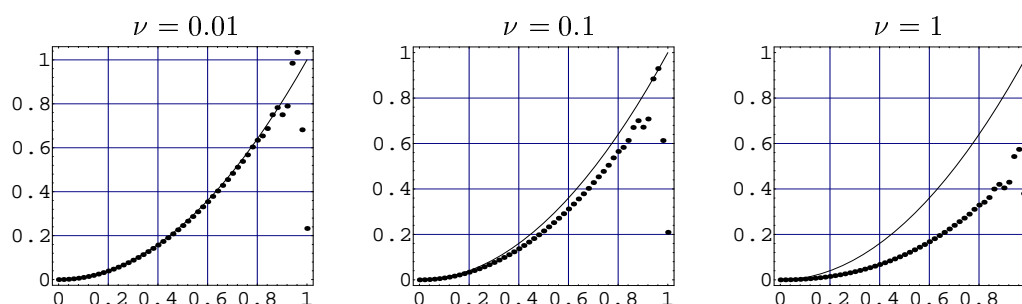


Bild 5.3

Diese Approximation kann natürlich weiter verbessert werden. Dafür erzeugen wir ein neues x_0 durch eine Interpolation der errechneten Werte und lösen damit das neue System

$$(P_h dA(x_0))^* \varphi = \delta(\cdot - \frac{1}{2}).$$

Wir betrachten nun nichtlineare Gleichungen, deren Lösungen nicht glatt sind. Sei der Operator A mit $\nu = 0.01$ betrachtet. Untersucht werden die Systeme mit Lösungen

$$x_b(t) = \begin{cases} 2t & , t \leq 1/2 \\ 2-2t & , t \geq 1/2 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad x_c(t) = \begin{cases} 1 & , \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}.$$

Das Ergebnis der Rekonstruktion wird im Bild 5.4 dargestellt und zeigt, daß im nichtlinearen Fall die Sensibilität bezüglich Unstetigkeiten in der Lösung größer ist.

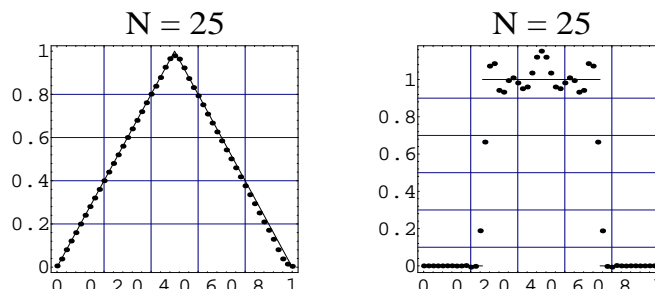


Bild 5.4

5.2 Das Cauchy-Problem

Wir betrachten zuerst das Problem (CP a) auf einem Kreisring mit Radius $1/2$ bzw. 1 . In den nächsten zwei Beispielen werden wir versuchen, das Iterationsverfahren anzuwenden, um die Dirichlet- bzw. Neumanndaten eines Cauchy-Problems zu rekonstruieren. Wie beginnen mit der Rekonstruktion der Dirichletdaten.³

Beispiel 5.2.1 Sei f eine Distribution in $H^{1/2}(\Gamma_l)$ und $A : H^{1/2}(\Gamma_r) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_l)$ der in Abschnitt 4.3.2 definierte Operator. Wir haben schon gesehen, daß eine Lösung des Problems (CP a) mit Cauchydaten $(f, 0)$ äquivalent dazu ist, die lineare Gleichung

$$A\varphi = f$$

zu lösen. Mit Hilfe der durch

$$\Psi(t) := (\cos[t - \pi/2], \sin[t - \pi/2]), \quad t \in [0, \pi]$$

definierten Parametrisierung von Γ_r erzeugen wir die Funktionen

$$\varphi_a(\Psi(t)) = 2|t/\pi - 1/2|, \quad t \in [0, \pi]$$

und

$$\varphi_b(\Psi(t)) = \sin(t), \quad t \in [0, \pi].$$

Diese sollen die Lösungen unserer Cauchy-Probleme sein. Die rechten Seite f_a bzw. f_b werden nun durch die Lösung der entsprechenden direkten Probleme $f = A\varphi$ berechnet. Dafür muß man nur eine gemischte Randwertaufgabe auf Ω für jedes φ lösen, nämlich

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{in } \Omega \\ w_\nu = 0, & \text{auf } \Gamma_r \\ w = \varphi, & \text{auf } \Gamma_l \\ w_\nu = 0, & \text{auf } \Gamma_i \end{cases}.$$

Dann gilt

$$f = A\varphi := w|_{\Gamma_r}.$$

Wir können dann das Iterationsverfahren auf die Probleme (CP a) mit Cauchydaten $(f_a, 0)$ bzw. $(f_b, 0)$ anwenden. Die Iteration (IT) wird mit der Anfangsnäherung $\varphi_0 = 0$ gestartet. Das Ergebnis ist im Bild 5.5 dargestellt.⁴

³Die Anwendung der Methode der finiten Elemente auf elliptische Cauchy-Probleme wird in [Han] betrachtet. Diese Methode wird dort benutzt, um eine variationelle Formulierung eines Cauchy-Problems zu lösen.

⁴Das Gitter der Methode der finiten Elemente besteht aus 2048 ($= 2^{11}$) gleichmäßig verteilten Dreiecken und hat 33 Knoten auf Γ_r . Der Knoten 1 entspricht dem Punkt $(0, -1)$ und der Knoten 33 dem Punkt $(0, 1)$. Bei dieser Feinheit des Gitters dauert es ca. 3.5 sec, um ein einzelnes gemischtes Problem zu lösen, hundert Iterationsschritte werden in etwa 11 min errechnet.

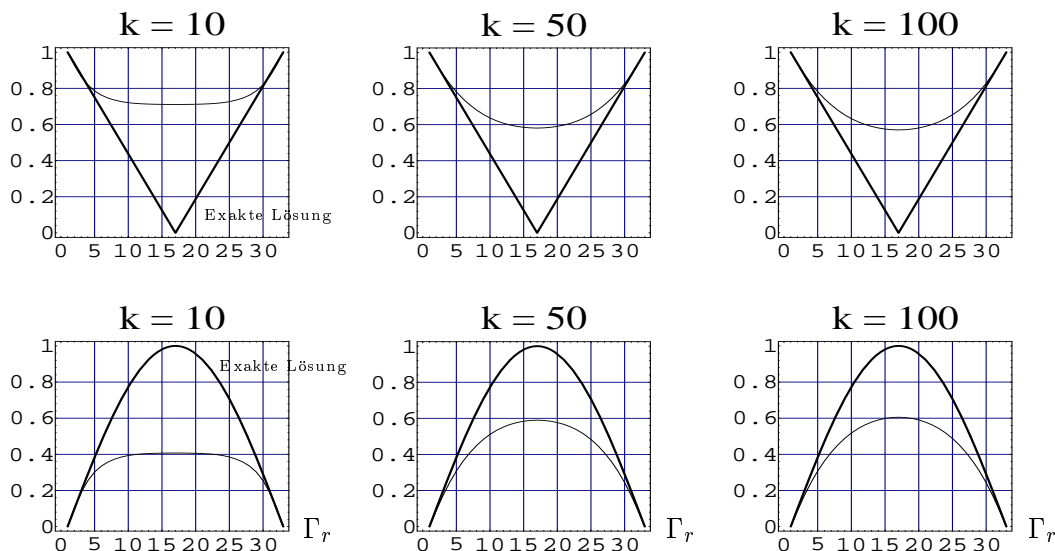


Bild 5.5

Die numerische Lösung kann verbessert werden, wenn das Gitter verfeinert wird. Die Iteration wurde auch auf einem feineren Gitter (mit 2^{17} Elementen) getestet. Die Verbesserung in der Qualität der numerischen Lösung war deutlich erkennbar, obwohl der Fehler noch relativ groß war. Andererseits war das Programm 87 Mal langsamer als mit dem ersten Gitter.⁵ Eine mögliche Erklärung für diese langsame Verbesserung der numerischen Lösung in Abhängigkeit des Gitters ist, daß die numerische Realisierung des Operators langsam gegen den kontinuierlichen konvergiert. Wir kehren zu diesem Thema zurück, wenn wir die Iteration auf dem Quadrat numerisch testen. In der Rechteckgeometrie sind die Eigenwerte des kontinuierlichen Operators bekannt und wir können diese mit den Eigenwerten des numerischen Operators vergleichen.

Das nächste Beispiel illustriert die Rekonstruktion der Neumanndaten des Problems (CP a). Analog zum Beispiel 5.2.1 definieren wir den Operator $A : H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)' \rightarrow H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$ durch die Lösung der gemischten Randwertaufgabe

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w = 0, \text{ in } \Omega \\ w_\nu = \varphi, \text{ auf } \Gamma_r \\ w = 0, \text{ auf } \Gamma_l \\ w_\nu = 0, \text{ auf } \Gamma_i \end{array} \right.$$

$A(\varphi) := w|_{\Gamma_l}$

⁵500 Schritte wurden in einer gesamten Laufzeit von 82 Stunden errechnet.

Sei g eine Distribution in $H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$. Die Spur $\varphi := u_\nu|_{\Gamma_r}$ der Lösung des Cauchy- Problems

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{auf } \Gamma_l \\ u_\nu = g, & \text{auf } \Gamma_l \\ u_\nu = 0, & \text{auf } \Gamma_i \end{cases}$$

zu bestimmen, ist äquivalent dazu, die Gleichung $A\varphi = g$ zu lösen.

Beispiel 5.2.2 Sei Ψ die in Beispiel 5.2.1 definierte Parametrisierung von Γ_r . Wir setzen die Funktion

$$\varphi(\Psi(t)) = 1, \quad t \in [0, \pi]$$

und errechnen die rechte Seite $g = A\varphi$. Wir nutzen die Cauchydaten $(0, g) \in H^{1/2}(\Gamma_l) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$ für die Iteration, die mit $\varphi_0 = 0$ gestartet wird. Einige Elemente der erzeugten Folge $\{\varphi_k\}$ werden in Bild 5.6.a dargestellt.⁶

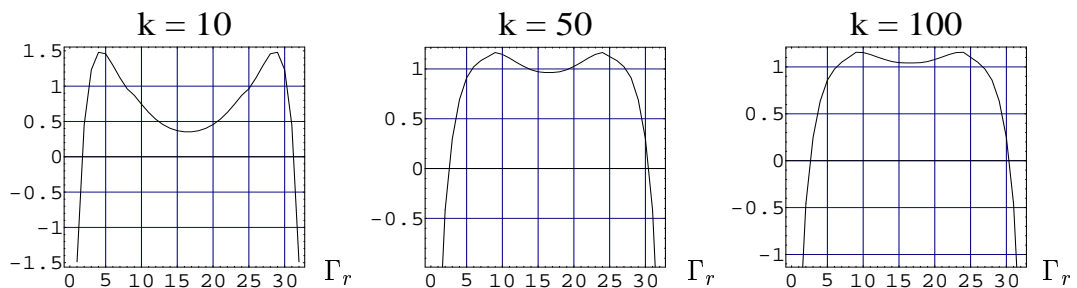


Bild 5.6.a

Die Singularitäten in den Punkten $(0, -1)$ und $(0, 1)$ (Knoten 1 bzw. 33), die in den Neumanndaten von Bild 5.6.a zu erkennen sind, sind wohl eine Konsequenz davon, daß es singuläre Terme in der Darstellung⁷ der H^1 -Lösung von (CP a) gibt. Ein anderer Hinweis, der diese Hypothese stützt, ist die Beobachtung, daß solche Singularitäten auch in der numerischen Lösung von (CP a) vorkommen. In der Tat, die Lösung von (CP a) ist gleichzeitig Lösung des gemischten Problems

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{auf } \Gamma_l \\ u_\nu = 1, & \text{auf } \Gamma_r \\ u_\nu = 0, & \text{auf } \Gamma_i \end{cases}.$$

⁶Die numerische Implementation ist völlig analog zu der von Beispiel 5.2.1, und die Daten im Bild 5.6 werden so wie im Bild 5.5 dargestellt.

⁷Siehe Satz B.3.4.

Das Bild 5.6.b zeigt die numerische Lösung dieses gemischten Problems und ihre Neumannspur auf Γ_r . Die Singularitäten in den Kontaktpunkten sind deutlich zu erkennen.

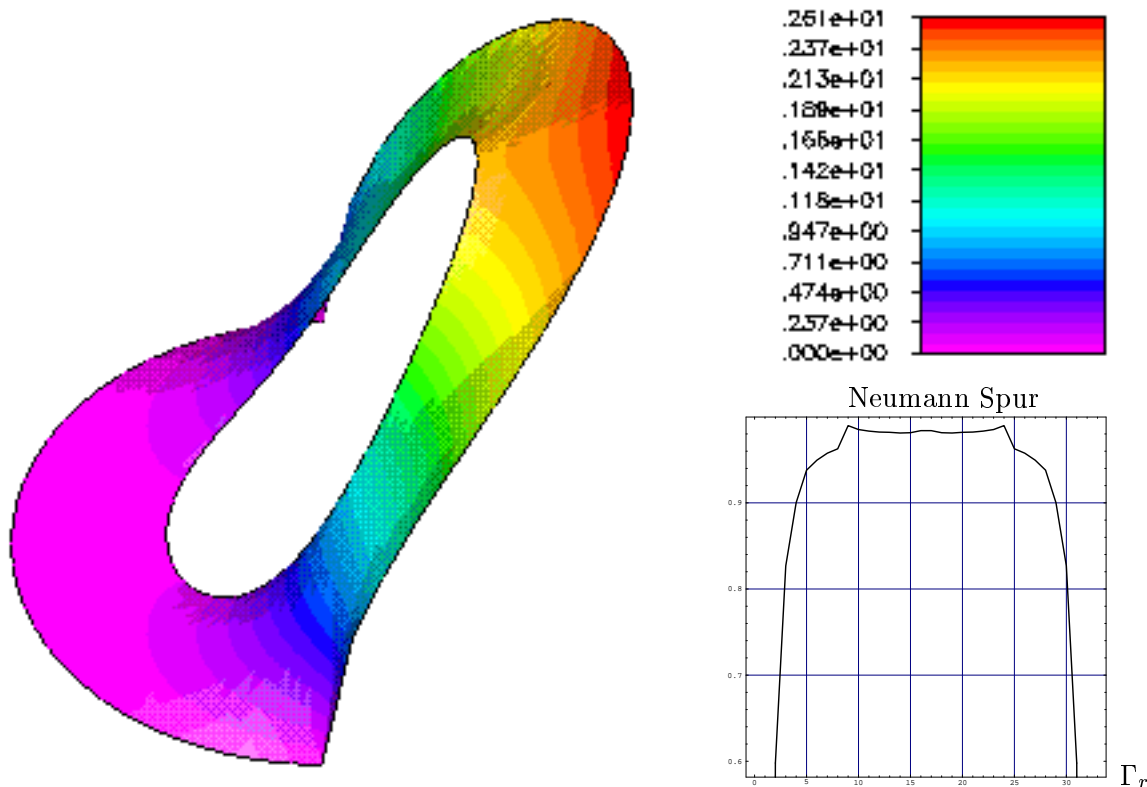


Bild 5.6.b

Im nächsten Beispiel wird die Korrekturformel von Satz 4.3.1 untersucht. Das für die Lösung der gemischten Probleme benutzte Finite-Elemente-Gitter ist dasselbe wie beim vorherigen Beispielen (mit 2048 Dreieckselementen und 33 Knoten auf Γ_r).

Beispiel 5.2.3 Seien die Operatoren A und A^\sharp und das lineare Funktional $r_{a,b}(\cdot)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ wie in Abschnitt 4.3.2 definiert. Wir wollen die Korrekturformel

$$\langle A\varphi, \psi \rangle = - \langle \varphi, A^\sharp \psi \rangle + r_{a,b}(\psi) \quad (5.2)$$

$\forall \varphi \in V_{a,b}$ und $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_l)$ überprüfen.⁸ Wir fangen mit $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)$ an (d.h. $a = b = 0$). In diesem Fall gilt $r_{0,0} \equiv 0$, und kein Korrekturterm ist nötig. In der nächsten Tabelle werden die Werte der inneren Produkte in 5.2 für einige φ und ψ gezeigt.⁹

⁸Für die Notation siehe Abschnitt 4.3.2.

⁹Die Definition der Funktionen φ bzw. ψ in den nächsten Tabellen ist durch die Parametrisationen $\Psi(t) := (\cos[t - \pi/2], \sin[t - \pi/2])$ bzw. $\Phi(t) := (\cos[t + \pi/2], \sin[t + \pi/2])$, $t \in [0, \pi]$ zu verstehen.

$(\varphi(t), \psi(t))$	$\langle A\varphi, \psi \rangle$	$-\langle \varphi, A^\sharp \psi \rangle$	relative Fehler ¹⁰
$(\frac{1}{\pi^2}t(t-\pi), \frac{t}{\pi})$	-0.09659	-0.10144	0.04781
$(\sin(t), (\frac{t}{\pi})^2)$	0.22590	0.23736	0.04823
$(\pi - 2 t - \frac{\pi}{2} , 1)$	0.49903	0.52309	0.04599

Das Resultat ist akzeptabel, denn die gemischten Probleme wurden mit einem relativ groben Gitter numerisch gelöst.

Nun berechnen wir die inneren Produkte in (5.2) und den Korrekturterm $r_{a,b}$ für a, b , die nicht verschwinden. Das Ergebnis folgt in der nächsten Tabelle.

$(\varphi(t), \psi(t))$	$\langle A\varphi, \psi \rangle$	$-\langle \varphi, A^\sharp \psi \rangle$	$r_{a,b}(\psi) - \langle \varphi, A^\sharp \psi \rangle$	rel. Fehler
$(1 + 2t, \cos(t))$	3.01941	1.92929	2.90155	0.03903
$(t - \frac{\pi}{2})^2, 2)$	11.68992	7.99153	11.89763	0.01776
$(\cos^2(t) + t, 2t - \pi)$	-3.94720	-2.45022	-3.78483	0.04113

Dies Resultat entspricht unserer Erwartung. Der relative Fehler ist von derselben Ordnung wie beim Fall $a = b = 0$.

Im letzten Beispiel wird das Problem (CP b) betrachtet. Ein konsistentes Cauchy-Problem wird untersucht und das Verhalten der numerischen Implementation des Iterationsverfahrens für inkonsistente Cauchydaten (f, g) in $H^{1/2}(\Gamma_l) \times H_0^{1/2}(\Gamma_l)'$ analysiert.

Beispiel 5.2.4 Sei $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$. Wir betrachten folgendes Cauchy-Problem auf dem Gebiet Ω :

$$(CP \ b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega \\ u = f, \quad \text{auf } \Gamma_l \\ u_\nu = g, \quad \text{auf } \Gamma_l \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1) \\ u(x, 1) = 0, \quad x \in (0, 1) \end{array} \right. ,$$

¹⁰Der relative Fehler wird durch

$$\frac{|\langle A\varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, A^\sharp \psi \rangle|}{|\langle A\varphi, \psi \rangle|}$$

definiert.

wobei $\Gamma_l = \{(x, 0) / x \in (0, 1)\}$ und $\Gamma_r = \{(x, 1) / x \in (0, 1)\}$ sind. Da das Gebiet Ω kleiner als das Gebiet von Problem (CP b) aus Abschnitt 3.1.2 ist, konvergieren die Eigenwerte von T langsamer gegen 1. In der Tat, die Eigenwerte von T , eingeschränkt auf $\text{span}\{\sin(j\pi x)\}$, sind $\lambda_j = (\sinh(j\pi)/\cosh(j\pi))^2$ in Gegensatz zu den Eigenwerten $(\sinh(2j\pi)/\cosh(2j\pi))^2$ aus Abschnitt 3.2.1.

Wir setzen $f(y) = 0$, $g(y) = \sin(\pi y)$ und versuchen die Spur der Lösung

$$u(x, y) = \frac{\sinh(\pi x) \sin(\pi y)}{\pi}$$

auf Γ_r zu rekonstruieren: $\bar{\varphi} = u|_{\Gamma_r}$. Wenn wir das Iterationsverfahren mit $\varphi_0 = 0$ starten, folgt aus der Abschätzung (3.25), daß

$$\|\varphi_k - \bar{\varphi}\| \leq \lambda_1^{2k} \|\bar{\varphi}\|$$

ist. Da $\lambda_1^{400} = 0.0503$ ist, liegt der Fehler nach 200 Schritten bei etwa 5%. Unsere numerischen Experimente zeigen aber die Konvergenz der numerischen Folge schon nach 100 Schritten.¹¹ Da wir in diesem Fall die Iteration $T^k \varphi_0$ exakt kennen, können wir die exakte Folge $\{\varphi_k\}$ mit der numerischen Iterationsfolge $\{\tilde{\varphi}_k\}$ vergleichen. Schon nach 50 Schritten stellt man fest, daß die Differenz $\|\varphi_k - \tilde{\varphi}_k\|$ dieselbe Ordnung hat wie $\|\varphi_k\|$.

Dieses Problem ist auch in Beispiel 5.2.1 zu erkennen (obwohl da nicht so dramatisch auftretend). Es kann kontrolliert werden, indem man durch die Verfeinerung des Gitters eine bessere Diskretisierung des Operators T konstruiert. Ein weiteres Experiment auf einem feineren Gitter zeigt,¹² daß bei einer besseren Genauigkeit die numerische Konvergenz erst nach 500 Schritten eintritt; nach 200 Schritten stellt man wieder fest, daß die Differenz $\|\varphi_k - \tilde{\varphi}_k\|$ dieselbe Ordnung hat wie $\|\varphi_k\|$. Das Ergebnis dieser Iteration wird im Bild 5.7.a dargestellt.

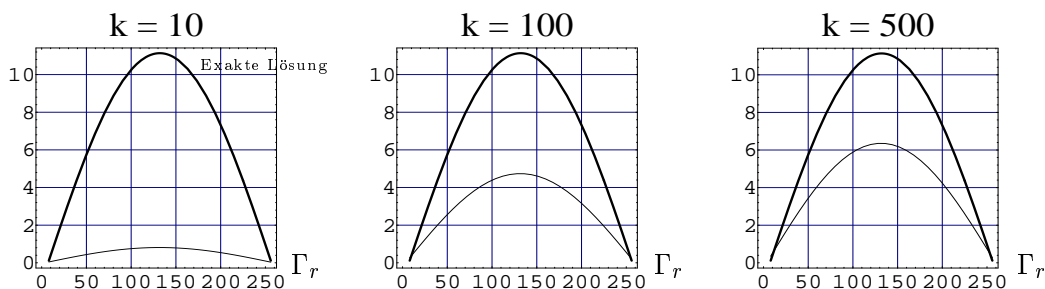


Bild 5.7.a

¹¹Wie bei den Beispielen 5.2.1 und 5.2.2 wurde ein Gitter mit 33 Knoten auf Γ_l bzw. Γ_r benutzt ($2^{12}=4096$ gleichmäßig verteilte Dreiecke). Die Rechnungen wurden aber mit doppelter Genauigkeit durchgeführt.

¹²Das Gitter hat 257 Knoten auf Γ_r und 2^{18} Elemente. Für diese Iteration wird wieder die Version 7.1 des Programm-Paketes PLTMG benutzt, die mit doppelter Genauigkeit arbeitet. Jedes gemischte Problem benötigt ca. 5min CPU-Zeit, um gelöst zu werden.

Der relative Fehler in der $L^2(\Gamma_r)$ -Norm der φ_k 's in Bild 5.7.a beträgt 93.04%, 59.64% bzw. 45.98%.

Dieses Problem wurde von Falk und Monk analysiert. In [Mo] wurde das Problem (CP b) in $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ für die Cauchydaten $f(y) = 0$, $g(y) = \sin(\pi y)/\pi$ betrachtet. Benutzt wurde eine Regularisierungsstrategie, die zur Minimierung eines quadratischen Funktionals führte. Die errechneten Approximationen hatten einen relativen Fehler zwischen 6.7% und 12% in der $L^2(\Gamma_r)$ -Norm.

Wir versuchen eine andere Technik anzuwenden, um den Operator T zu diskretisieren. Das schaffen wir, indem wir die gemischten Randwertaufgabe durch die Methode der finiten Differenz lösen. Ein gleichmäßiges Gitter wird benutzt, um die lineare Systeme zu bauen. Die dadurch erzeugten Matrizen werden mit Hilfe der Routinen des Programm-Paketes ESSL invertiert, was uns erlaubt, den Operator T in Matrix-Form direkt zu repräsentieren.¹³ Jeder Iterationsschritt wird durch ein Produkt Matrix-Vektor berechnet. Die Ergebnisse sind vielversprechender als diejenigen, die durch die Anwendung der Methode der finiten Elemente errechnet werden, wie man im Bild 5.7.b feststellen kann.¹⁴ Dies liegt daran, daß bei derselben Diskretisierungsdimension die Eigenwerte (insbesondere der erste) der Finite-Differenz-Diskretisierung von T näher an den Eigenwerte des kontinuierlichen T liegen als die Eigenwerte der finiten Elementen-Diskretisierung von T .

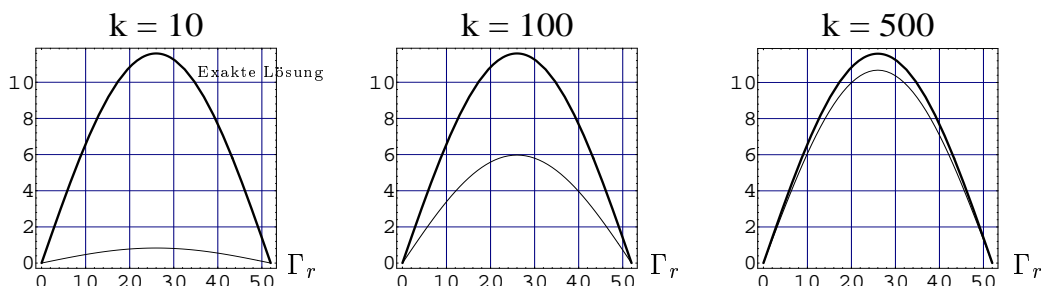


Bild 5.7.b

Der relative Fehler in der $L^2(\Gamma_r)$ -Norm von den φ_k 's in Bild 5.7.b beträgt 92.8%, 48.5% bzw. 7.9%. In der folgenden Tabelle zeigen wir den relativen Fehler, den Zeitaufwand und den Speicherverbrauch für die Implementation des Iterationsverfahrens durch die Methode der finiten Differenz auf verschiedenen Gittern.

¹³Dies ist offensichtlich der aufwendigste Teil der numerischen Rechnung.

¹⁴Das Gitter der Methode der finiten Differenz im Bild 5.7.b hat 52 Knoten auf Γ_r . Der Knoten 1 entspricht dem Punkt (1,0) und der Knoten 42 dem Punkt (1,1).

Anzahl von Knoten auf Γ_r	relativer Fehler in der L^2 -Norm nach 1000 Schritten	CPU-Zeit ¹⁵	benötigter Speicherplatz
16	20.4%	0.62s	2 MBytes
32	10.1%	24.39s	18 MBytes
52	6.2%	6m 02.31s	122 MBytes
64	5.0%	20m 34.23s	270 MBytes

Bemerkung 5.2.5 Wenn wir die numerischen Ergebnisse von Problem (CP a) und (CP b) vergleichen, schließen wir, daß die Asymptotik der Eigenwerte beider Operatoren qualitativ sehr verschieden ist und sehr stark von dem Gebiet abhängt.

Wir haben in Beispiel 5.2.4 versucht, die einfachst mögliche Rekonstruktion numerisch zu realisieren und sogar für diese Cauchydaten waren die Ergebnisse numerisch sehr aufwendig. Für das Problem (CP a) haben aber umfangreiche Tests gezeigt, daß das Iterationsverfahren in der Lage ist, gute Resultate schon bei kleiner Diskretisierungsdimension zu liefern.

Bemerkung 5.2.6 Eine Eigenschaft der Methode der finiten Elemente ist, daß in der endlichdimensionalen Formulierung des gemischten Problems der kontinuierliche Operator L_n^l bzw. L_d in einer Art diskretisiert wird, die uns erlaubt, $\|L_{n,FE}^l\| \leq \|L_n^l\|$ bzw. $\|L_{d,FE}\| \leq \|L_d\|$ zu schließen,¹⁶ wobei $L_{n,FE}^l$ bzw. $L_{d,FE}$ die Diskretisierung durch die Methode der finiten Elemente des Operators L_n^l bzw. L_d ist.¹⁷

Wenn wir den diskreten Operator $\tilde{T}_l := \gamma_n \circ L_{d,FE} \circ \gamma_d \circ L_{n,FE}^l$ definieren, folgt nun, daß die Norm des Operators \tilde{T}_l höchstens so groß ist wie die von T_l . In allen Beispielen, in denen wir die Norm von \tilde{T}_l errechnen können, stellen wir aber fest, daß \tilde{T}_l eine echte Kontraktion erzeugt.

Dies können wir in der Rechteckgeometrie deutlich überprüfen. Wenn wir die Steifigkeits-Matrizen von beiden gemischten Problemen invertieren und sie mit den passenden Spuroperatoren komponieren, können wir den Operator \tilde{T}_l in Matrixform schreiben und die Eigenwerte mit denen von T_l vergleichen. Die Abweichung zwischen den Eigenwerten von \tilde{T}_l und denen von T_l (siehe Beispiel 5.2.4) ist, soweit wir gerechnet haben, sehr groß, da die Eigenwerte von \tilde{T}_l viel kleiner als 1 sind. Dies erklärt die von uns beobachtete schnelle numerische Konvergenz.

Eine Konsequenz dieser durch \tilde{T}_l erzeugten Kontraktion ist, daß sogar für inkonsistente Cauchydaten das diskrete Iterationsverfahren konvergiert. Dies haben wir pseudo-Konvergenz genannt.

¹⁵Die CPU-Zeit bezieht sich zu einem IBM RISC System/6000-590 mit 230 MFLOP's Rechengeschwindigkeit.

¹⁶Siehe [Au2].

Für die Notation siehe die Definition der Iteration (IT) in (3.1).

¹⁷Was die Diskretisierung durch die Methode der finiten Differenz betrifft, ist uns kein Argument bekannt, das diese Aussage garantiert.

Man kann in der diskreten Iteration zwischen der pseudo-Konvergenz und der echten Konvergenz der numerischen Iterationsfolge $\{\varphi_k\}$ unterscheiden. Wenn die Cauchydaten konsistent sind, dann konvergieren die H^1 -Folgen $L_n(\varphi_k)$ und $L_d(\gamma_d(L_n(\varphi_k)))$ gegen dieselbe Grenzfunktion, nämlich die H^1 -Lösung des Cauchy-Problems. Wenn aber die Cauchydaten inkonsistent sind, dann konvergiert die Differenz $L_n(\varphi_k) - L_d(\gamma_d(L_n(\varphi_k)))$ nicht gegen Null in $H^1(\Omega)$.

Bemerkung 5.2.7 Im Gegensatz zu den Ergebnissen von Abschnitt 5.1, sind wir für das Cauchy-Problem nicht in der Lage, eine punktweise Rekonstruktion durchzuführen. Dies liegt daran, daß die Cauchydaten $(0, \delta_h) \in H^{1/2}(\Gamma_l) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_l)'$ inkonsistent sind, wobei δ_h irgendeine glatte Approximation für die Dirac-Distribution δ ist. Dies haben wir festgestellt, indem wir versuchten, Cauchy-Probleme mit verschiedenen Daten δ_h iterativ zu lösen. Beobachtet wurde nur die pseudo-Konvergenz aus Bemerkung 5.2.6.

Anhang A

Funktionen–Räume

In diesem Anhang werden die Definitionen der Sobolev–Räume eingeführt, die in dieser Arbeit benutzt werden. Hauptsächlich werden die Räume $H^s(\Omega)$, $H_0^s(\Omega)$ und $H^s(\partial\Omega)$ für $s \in \mathbb{R}$, gebraucht, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (insbesondere \mathbb{R}^2) ein reguläres¹, offenes, beschränktes und zusammenhängendes Gebiet ist. Für die variationelle Formulierung von gemischten elliptischen Randwertaufgaben werden die Sobolev–Räume $H_0^s(\Omega \cup \Gamma)$ und $H^s(\Gamma)$ benutzt, wobei $\Gamma \subset \partial\Omega$ ein bezüglich $\partial\Omega$ offenes Randstück ist.

Die Literatur über Sobolev–Räume ist umfangreich. Die für diese Arbeit am häufigsten konsultierten Bücher waren [Ad], [Au1], [DaLi], [Fo], [GiTr], [Gri1], [Gri2], [LiMa], [Tre] und [Tro]. (Man muß mit der Notation vorsichtig sein. Ein Beispiel dafür ist der Raum $H^{-1/2}$, der für einige Autoren der Dualraum von $H_0^{1/2}$ und für andere der Dualraum von $H_{00}^{1/2}$ ist.)

A.1 Die Räume $C^k(\Omega)$

Wir beginnen die Untersuchung der Sobolev–Räume mit der Definition der Räume von glatten Funktionen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Man setzt $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, den linearen Raum von Funktionen, die zusammen mit ihren Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig in Ω sind. Dann können wir den Raum

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$$

definieren. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $C^k(\overline{\Omega})$ der Raum der Funktionen aus $C^k(\Omega)$, die zusammen mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung k stetig fortsetzbar auf $\overline{\Omega}$ sind.² Analog wie vorher definieren wir

¹Damit meinen wir, daß Ω glatt ist und lokal auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt.

²Für beschränktes Ω ist dies ein Banach–Raum mit der Norm $\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sum_{\alpha \leq k} |D^\alpha u|_{\infty; \Omega}$.

$$C^\infty(\overline{\Omega}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\overline{\Omega}).$$

Für eine stetige Funktion u in Ω definiert man den Träger von u (oder $\text{supp } u$) als den Abschluß von $\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}$. Der lineare Raum $C_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ist definiert durch

$$C_0^k(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) / \text{supp } u \text{ ist eine kompakte Teilmenge von } \Omega\}.$$

Sei $\Gamma \subset \partial\Omega$ ein bezüglich $\partial\Omega$ offenes Randstück. Der lineare Raum $C_0^k(\Omega \cup \Gamma)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ist definiert durch

$$C_0^k(\Omega \cup \Gamma) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}) / \text{supp } u \text{ ist eine kompakte Teilmenge von } \Omega \cup \Gamma\}.$$

Die Funktionen aus $C_0^k(\Omega \cup \Gamma)$ verschwinden identisch auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$. Offensichtlich gilt die Einbettung

$$C_0^k(\Omega) \subseteq C_0^k(\Omega \cup \Gamma) \subseteq C^k(\Omega).$$

Definition A.1.1 (Distribution) Die Konvergenz einer Folge $\{u_j\}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ kann folgendermaßen definiert werden: Man sagt, die Folge $\{u_j\}$ konvergiert im Sinne von $\mathcal{D}(\Omega)$ gegen 0, wenn eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ existiert, so daß für alle j $\text{supp } u_j \subseteq K$ ist und $D^\alpha u_j \rightarrow 0$ gleichmäßig in K für alle Multiindizes α konvergiert. Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist ein lineares Funktional auf $C_0^\infty(\Omega)$ mit $(T, u_j) \rightarrow 0$ für alle $u_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definition A.1.2 (Distributionelle Ableitung) Wenn $T : u \mapsto (T, u)$ eine Distribution ist, so ist auch $S : u \mapsto -(T, u_{x_i})$ eine Distribution. Man definiert S als die (distributionelle) Ableitung von T oder die Ableitung im Sinne von $\mathcal{D}'(\Omega)$ und schreibt $\partial T / \partial x_i = S$. Für einen allgemeinen Multiindex α schreibt man

$$D^\alpha T : u \mapsto (-1)^{|\alpha|} (T, D^\alpha u), \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega).^3$$

A.2 Die Sobolev-Räume $H^s(\Omega)$

Sei nun zusätzlich Ω ein reguläres, offenes, beschränktes und zusammenhängendes Gebiet. Das Randstück $\Gamma \subset \partial\Omega$ sei wie vorher definiert. Hier wird die Strategie von Agmon [Ag] und Miranda [Mi] benutzt, die lautet, die Sobolev-Räume mit nicht negativen Indizes als

³Aus der Definition folgt $T_{x_i x_j} = T_{x_j x_i}$.

Abschluß der Räume von glatten Funktionen zu definieren. Danach werden die Räume mit negativen Indizes durch Dualität definiert.

Wir geben zuerst die Definition von Sobolev-Räumen mit ganzzahligen Indizes. Für $k \in \mathbb{N}$ setzt man

$$H^k(\Omega) := \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{k;\Omega}}, \quad H_0^k(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k;\Omega}}$$

und

$$H_0^k(\Omega \cup \Gamma) := \overline{C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma)}^{\|\cdot\|_{k;\Omega}},$$

wobei

$$\|u\|_{k;\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

ist. Das Funktional $\|\cdot\|_{k;\Omega}$ definiert auf dem Raum $H^k(\Omega)$ bzw. $H_0^k(\Omega)$ eine Norm, und damit sind diese Banachräume.

In Kapitel 2 benötigen wir in Satz 2.4.4 die Definition von lokaler Regularität einer Distribution. Deswegen setzen wir für $k \in \mathbb{N}$ die Räume

$$H_{\text{loc}}^k(\Omega) := \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid u\varphi \in H^k(\Omega) \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

Für einen positiven reellen Index s kann man dasselbe Abschlußargument nutzen, um die Räume H^s zu definieren. Man braucht dafür nur eine geeignete Definition für die Norm $\|\cdot\|_s$.

Sei $s = k + \sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in (0, 1)$. Man definiert ein Funktional $\|\cdot\|_{s;\Omega}$ auf $C^\infty(\overline{\Omega})$ durch

$$\|u\|_{s;\Omega}^2 := \|u\|_{k;\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\sigma}} dx dy.$$

Der Sobolev-Raum $H^s(\Omega)$ bzw. $H_0^s(\Omega)$ bzw. $H_0^s(\Omega \cup \Gamma)$ wird als der Abschluß von $C^\infty(\overline{\Omega})$ bzw. $C_0^\infty(\Omega)$ bzw. $C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma)$ bezüglich $\|\cdot\|_{s;\Omega}$ definiert.

Bemerkung A.2.1 *Es folgt aus der Definition, daß für beliebiges $s \geq 0$ die Einbettung*

$$C_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow H_0^s(\Omega) \subseteq H_0^s(\Omega \cup \Gamma) \subseteq H^s(\Omega)$$

gilt.⁴ Für $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ gilt sogar $C_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega)$.⁵ Daraus folgt die dimensionsunabhängige Identität:

⁴ \hookrightarrow heißt dicht eingebettet.

⁵Siehe z.B. [LiMa] S. 9.

$$H_0^s(\Omega) = H_0^s(\Omega \cup \Gamma) = H^s(\Omega), \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2}.$$

Bemerkung A.2.2 Häufig wird der Sobolev-Raum $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, als der Teilraum von $L^2(\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq k\}^6$$

definiert. Die Hilbertraum-Struktur von $H^k(\Omega)$ wird durch das innere Produkt

$$\langle u, v \rangle_{k;\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx$$

beschrieben. Offensichtlich gelten für $0 < k < l \in \mathbb{N}$ die Einbettungen

$$H^l(\Omega) \hookrightarrow H^k(\Omega) \hookrightarrow H^0(\Omega) = L^2(\Omega)^7$$

Bemerkung A.2.3 Eine andere übliche Definition des Sobolev-Raums $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}^+$, falls Ω regulär ist, wird mit Hilfe der Fouriertransformation in $L^2(\Omega)$ durchgeführt. Man definiert zuerst den Hilbert-Raum

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) / (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}^8$$

mit dem inneren Produkt $\langle u, v \rangle_{s;\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u} \hat{v} \, d\xi$. Der Raum $H^s(\Omega)$ wird dann durch

$$H^s(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \exists U \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ mit } u = U|_{\Omega}\}$$

definiert. Die $H_0^s(\Omega)$ -Funktionen sind diejenigen in $H^s(\Omega)$, deren Fortsetzung durch Null \tilde{u} auf \mathbb{R}^n in $H^s(\mathbb{R}^n)$ liegen.

Für die Untersuchung von gemischten elliptischen Randwertaufgabe benötigt man noch zwei spezielle Räume. Der erste ist der Raum $H^1(\Omega; \Delta)$ der durch

$$H^1(\Omega; \Delta) := \{u \in H^1(\Omega) / \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

definiert wird. Er spielt eine große Rolle in der Analyse solcher Aufgaben, da ihre Lösungen genau diese Regularität besitzen.⁹ Der zweite ist der Raum $H_{00}^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}^+$. Für $s = k + \sigma$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in [0, 1)$ setzt man

⁶Die Ableitungen sind in distributionellem Sinn zu verstehen.

⁷Die Einbettungen sind sogar kompakt (Satz von Rellich).

⁸Mit \hat{u} wird die Fouriertransformierte der Funktion $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

⁹Für Details siehe Anhang B.3.

$$\|u\|_{s;00;\Omega} := \left\{ \|u\|_{s;\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^2 d^{-2\sigma}(x, \partial\Omega) dx \right\}^{1/2},$$

wobei $d(x, \partial\Omega)$ die Euklidische Entfernung zwischen $x \in \mathbb{R}^n$ und $\partial\Omega$ ist. Der Raum $H_{00}^s(\Omega)$ wird nun als der Abschluß von $C_0^{\infty}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{s;00;\Omega}$ definiert.

Bemerkung A.2.4 Für $s \neq k + \frac{1}{2}$ kann man die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{s;\Omega}$ und $\|\cdot\|_{s;00;\Omega}$ zeigen und es gilt $H_{00}^s(\Omega) = H_0^s(\Omega)$.

Der interessanteste Fall für diese Arbeit ist der Fall $s = \frac{1}{2}$. Man kann den Raum $H_{00}^{1/2}(\Omega)$ als

$$H_{00}^{1/2}(\Omega) := \{u \in H_0^{1/2}(\Omega) / u d^{-1/2}(\cdot, \partial\Omega) \in L^2(\Omega)\}$$

definieren. Aus der Definition folgt, daß $H_{00}^{1/2}(\Omega)$ dicht in $H_0^{1/2}(\Omega)$ eingebettet und mit einer strikt feineren Topologie versehen ist.

Es fehlten noch die Räume H^{-s} , $s \in \mathbb{R}^+$. Dafür braucht man den Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ und seinen Dualraum $\mathcal{D}'(\Omega)$.¹⁰ Der Raum $H^{-s}(\Omega)$ wird definiert als

$$H^{-s}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) / \langle u, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)} \in H_0^s(\Omega)'\}.$$

Anders ausgedrückt, $H^{-s}(\Omega)$ ist der Dualraum von $H_0^s(\Omega)$ bezüglich des Pivot-Raumes $L^2(\Omega)$. Damit hat man für alle $s \in \mathbb{R}^+$ das Hilbert-Triple

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega).$$

Bemerkung A.2.5 Es gibt eine andere nützliche Definition von $H^{-k}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Man setzt

$$H^{-k}(\Omega) := \{u = \sum_{|\alpha| \leq k} D^{\alpha} u_{\alpha} ; u_{\alpha} \in L^2(\Omega)\}.$$

Diese Darstellung von $u \in H^{-k}(\Omega)$ ist aber nicht eindeutig, wie man in [Gri1] oder [LiMa] nachlesen kann.

¹⁰Siehe Anhang A.1.

A.3 Die Sobolev-Räume $H^s(\partial\Omega)$

Um die Sobolev-Räume $H^s(\partial\Omega)$ zu definieren, braucht man ein technisches Hilfsmittel, das es erlaubt, immer mit den Räumen $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ zu arbeiten. Das Gebiet Ω und sein Rand $\partial\Omega$ sind wie in Anhang A.2 definiert. Die notwendigen Hilfsmittel sind

Definition A.3.1 $(\mathcal{O}_i; \phi_i)_{i=1}^N$ heißt eine Familie von local maps genau dann, wenn

- $\mathcal{O}_i \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, mit $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_i$;
- jedes ϕ_i ein C^∞ -Diffeomorphismus ist mit:

$$\begin{cases} \phi_i : \mathcal{O}_i \mapsto Q := \{(y', y_n) \in \mathbb{R}^n / |y'| < 1, -1 < y_n < 1\}; \\ \phi_i(\mathcal{O}_i \cap \Omega) = Q^+ := \{(y', y_n) \in Q / y_n > 0\}; \\ \phi_i(\mathcal{O}_i \cap \partial\Omega) = \{(y', 0) \in Q\}. \end{cases}$$

Definition A.3.2 Eine Familie von Funktionen $(\alpha_i)_{i=1}^N$ heißt eine Partition der Eins bezüglich (\mathcal{O}_i, ϕ_i) genau dann, wenn

- $\alpha_i(x) \geq 0, \forall x \in \partial\Omega$;
- $\text{supp } \alpha_i \subset \mathcal{O}_i \cap \partial\Omega$;
- $\sum_{i=1}^N \alpha_i(x) = 1, \forall x \in \partial\Omega$.

Die Sobolev-Räume auf $\partial\Omega$ werden folgendermaßen definiert. Sei $(\mathcal{O}_i, \phi_i)_{i=1}^N$ eine Familie von local maps und $(\alpha_i)_{i=1}^N$ eine entsprechende Partition der Eins für $\partial\Omega$. Für eine Distribution f auf $\partial\Omega$ setze

$$(\theta_i f)(y') = \begin{cases} (\alpha_i f)(\phi_i^{-1}(y', 0)) & , |y'| < 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

auf \mathbb{R}^{n-1} . Der Raum $H^s(\partial\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$, wird nun durch

$$H^s(\partial\Omega) := \{f / \theta_i f \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, \dots, N\}$$

definiert.

Für $\Omega \in \mathbb{R}^2$ und ein offenes (zusammenhängendes) Randstück $\Gamma \subset \partial\Omega$ kann man die Räume $H^s(\Gamma)$ und $H^s((0, 1))$ identifizieren. Für den Raum $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ gibt es eine alternative Definition. Das ist nämlich

$$\mathcal{H}_{00}^{1/2}(\Gamma) := \{u = U|_{\Gamma} / U \in H_0^1(\Omega \cup \Gamma)\},$$

mit der Quotientennorm

$$\|u\|_{\star} := \inf_{\substack{U \in H_0^1(\Omega \cup \Gamma) \\ U|_{\Gamma} = u}} \|U\|_{1;\Omega}.$$

Die Räume $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ von A.2 und $\mathcal{H}_{00}^{1/2}(\Gamma)$ sind algebraisch identisch und die Normen $\|\cdot\|_{1/2;00;\Gamma}$ und $\|\cdot\|_{\star}$ sind äquivalent.

Aus dieser Definition folgt, daß die $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ -Funktionen genau diejenigen aus $H_0^{1/2}(\Gamma)$ sind, deren Fortsetzungen durch Null auf $\partial\Omega$ zu $H^{1/2}(\partial\Omega)$ gehören.

Anhang B

Gemischte Randwertaufgaben

In diesem Anhang werden die notwendige Untersuchungen über gemischte elliptische Randwertaufgaben durchgeführt. Hauptsächlich wird die Theorie von schwachen Lösungen von gemischten Problemen untersucht. Die für die Analyse benötigte Sobolev–Raumtheorie wird in Anhang A diskutiert.

Die Korrektgestelltheit solcher Randwertaufgaben im Sinne von Hadamard¹ wird nachgeprüft und die dazugehörigen Hilfssätze werden diskutiert, damit wir die für die Analyse des Iterationsverfahrens benötigte Theorie vollständig im Griff haben.

B.1 Spursätze

Zunächst definieren wir das Gebiet, auf dem unsere Randwertaufgaben betrachtet werden. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ein offenes reguläres² glattes beschränktes Gebiet. Der Rand von Ω sei zerlegbar in $\partial\Omega = \cup_{j=1}^N \overline{\Gamma_j}$, wobei die Randstücke Γ_j offen zusammenhängend sind und $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ für $1 \leq i \neq j \leq N$. Ferner sei γ_j der Dirichlet–Spuroperator von $C^\infty(\overline{\Omega})$ nach $C^\infty(\Gamma_j)$ und ν_j das Vektorfeld normal zu Γ_j .

Der erste Satz beschreibt das Verhältnis zwischen einer Funktion in $H^m(\Omega)$ und ihrer Spur auf $\partial\Omega$. Dies ist ein Standard–Ergebnis, das in [Ad], [LiMa], [Au1], [DaLi], [Gri1,2] und anderen zahlreichen Bücher über Sobolev–Räume gefunden werden kann.

Satz B.1.1 (Spursatz) *Sei $m \in \mathbb{N}$. Die auf $C^\infty(\overline{\Omega})$ definierte Abbildung*

$$u \mapsto \left\{ \gamma u, \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}, \dots, \gamma \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}} \right\}$$

hat eine einzige stetige (surjektive) Fortsetzung als ein Operator von

¹Siehe dafür Abschnitt 1.1.

²Damit meinen wir, daß Ω lokal auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt.

$$H^m(\Omega) \text{ nach } \prod_{i=0}^{m-1} H^{m-i-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Weiter besitzt diese Fortsetzung eine stetige Rechtsinverse.

Wir müssen noch wissen, was für eine Regularität die Neumannspur der $H^1(\Omega)$ -Lösung einer elliptischen Randwertaufgabe besitzt. Dafür reicht der Satz B.1.1 leider nicht. Da die Lösungen den von uns untersuchten Randwertaufgaben harmonisch sind, ist es hinreichend, einen Spursatz für Funktionen in $H^1(\Omega; \Delta)$ zu untersuchen.³ In dieser Richtung hilft uns

Satz B.1.2 (Neumannspur von $H^1(\Omega; \Delta)$) Die auf $C^\infty(\bar{\Omega})$ definierte Abbildung

$$\Gamma_\nu : u \mapsto \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

besitzt eine einzige stetige Fortsetzung

$$\tilde{\Gamma}_\nu : H^1(\Omega; \Delta) \longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega).$$

Dieser Satz ist ein Standard-Ergebnis der Theorie von elliptischen Randwertaufgaben und kann in [DaLi] und [Gri1,2] gefunden werden. In der Analyse von gemischten Problemen müssen wir auch über die Regularität der Spur von auf Ω definierten Funktionen auf dem Randstück Γ_j Bescheid wissen. Dabei hilft uns

Satz B.1.3 (Spursatz bzgl. eines Randstücks) Sei $m \in \mathbb{N}$. Die für jedes $j = 1, \dots, m$ auf $C^\infty(\bar{\Omega})$ definierte Abbildung

$$u \mapsto \left\{ \gamma_j u, \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \nu_j}, \dots, \gamma_j \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_j^{m-1}} \right\}$$

besitzt eine einzige stetige (surjektive) Fortsetzung als ein Operator von

$$H^m(\Omega) \text{ nach } \prod_{i=0}^{m-1} H^{m-i-\frac{1}{2}}(\Gamma_j).$$

³Nach Definition ist $H^1(\Omega; \Delta) = \{v \in H^1(\Omega) / \Delta v \in L^2(\Omega)\}$.

Dieser Satz unterscheidet sich nicht wesentlich von B.1.1 und kann in [Gri1,2] gefunden werden. Eigentlich gilt er sogar, wenn Ω ein krummliniges Polygon mit $C^{k,1}$ Rand, $k \geq m-1$ ist. Das nächste Korollar entspricht dem Spezialfall $m = 1$ und $l = 0$ von Satz B.1.3 und ist genau das, was man braucht, um $H^1(\Omega)$ -Lösungen von gemischten Randwertaufgaben zu untersuchen.

Korollar B.1.4 (Dirichletspur bzgl. eines Randstücks) *Der Dirichlet-Spuroperator von $C^\infty(\overline{\Omega})$ nach $C^\infty(\Gamma_j)$ hat eine einzige stetige (surjektive) Fortsetzung als ein Operator von*

$$H^1(\Omega) \text{ nach } H^{1/2}(\Gamma_j),$$

für $j = 1, \dots, N$.

Bemerkung B.1.5 *Der Spuroperator in Satz B.1.3 und insbesondere in Korollar B.1.4 besitzt eine stetige Rechtsinverse. Das folgt aus der Existenz eines Prolongationsoperators $\omega \in \mathcal{L}(H^s(\Gamma_j), H^s(\partial\Omega))$, $s \geq 0$, der die stetige Rechtsinverse des Restriktionsoperators $\rho \in \mathcal{L}(H^s(\partial\Omega), H^s(\Gamma_j))$ ist. Für Details siehe [Au1] S.187-194.*

Was noch fehlt, ist eine Aussage über die Regularität der Neumannspur von H^1 -Funktionen auf dem Randstück Γ_j . Wie in Satz B.1.2 reicht es, die Funktionen in $H^1(\Omega; \Delta)$ zu untersuchen. Der nächste Satz arbeitet genau in diesem Kontext. Da er von besonderem Interesse ist, wird hier eine Beweisskizze durchgeführt.

Satz B.1.6 (Neumannspur bzgl. eines Randstücks) *Der von $C^\infty(\overline{\Omega})$ nach $C^\infty(\Gamma_j)$ definierte Neumann-Spuroperator besitzt eine einzige stetige Fortsetzung als ein Operator von*

$$H^1(\Omega; \Delta) \text{ nach } H_{00}^{1/2}(\Gamma_j)',$$

für $j = 1, \dots, N$.

Beweis:

Sei $v \in V := \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_i v = 0, i \neq j\}$. Aus der Definition von $H_{00}^{1/2}$ folgt $\gamma_j v \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_j)$. Für $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ liefert uns die Greensche Formel B.2.3

$$\int_{\Gamma_j} u_{\nu_j} v \, d\Gamma = \int_{\Omega} \Delta u \, v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \, \nabla v \, dx.$$

Daraus folgt

$$\left| \int_{\Gamma_j} u_{\nu_j} v \, d\Gamma \right| \leq c \|u\|_{H^1(\Omega; \Delta)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Das heißt, die Neumannspur von u auf Γ_j ist durch

$$\|\gamma_j \frac{\partial u}{\partial \nu_j}\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_j)'} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega; \Delta)}, \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

abschätzbar. Die Behauptung folgt nun aus der Dichtheit der Einbettung von $C^\infty(\overline{\Omega})$ nach $H^1(\Omega; \Delta)$. ■

B.2 Die Greensche Formel

In der Analyse des Iterationsverfahrens in Abschnitt 3.2 sowie in der Untersuchung von gemischten Randwertaufgaben wird eine spezielle Fassung der Greenschen Formel gebraucht. Sie soll an die in dieser Arbeit benutzten Sobolev-Räume angepaßt werden.

Sei die Menge Ω , der Dirichlet-Spuroperator γ_j und das normale Vektorfeld ν_j wie in Anhang B.1 definiert. Der nächste Satz wird in der Literatur üblicherweise (**erste**) **Greensche Formel** genannt. Er gilt auch, falls $\partial\Omega$ nur Lipschitz-stetig vorausgesetzt wird. Ein Beweis dafür kann in [Au1], [DaLi], [Gri1], [LiMa], [Krs] oder [Tro] gefunden werden.

Satz B.2.1 *Seien die Funktionen u, v in $C^\infty(\overline{\Omega})$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\partial\Omega} u_\nu v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx. \quad (\text{B.1})$$

Die Gleichung (B.1) gilt auch für Funktionen $(u, v) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ und ebenfalls für $(u, v) \in H^1(\Omega; \Delta) \times H^1(\Omega)$.⁴

In einem gemischten Problem werden die Randdaten auf Γ_j statt auf $\partial\Omega$ vorgeschrieben. Deswegen suchen wir nach hinreichenden Bedingungen, die uns erlauben, das Randintegral $\int_{\partial\Omega} u_\nu v$ in (B.1) mit der Summe $\sum_j \int_{\Gamma_j} u_{\nu_j} v$ zu vertauschen. Den ersten Hinweis dafür liefert uns

Satz B.2.2 *Seien die Funktionen u in $H^2(\Omega)$ und v in $H^1(\Omega)$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u_{\nu_j} v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx. \quad (\text{B.2})$$

Dieser Satz ist eigentlich eine Konsequenz des Spursatzes B.1.3, denn dieser garantiert die Beschränktheit der inneren Produkte in (B.2) in Sinne von $L^2(\Gamma_j)$. Satz B.2.2 bleibt

⁴Die letzte Behauptung folgt aus der Dichtheit der Einbettung von $C^\infty(\overline{\Omega})$ nach $H^1(\Omega; \Delta)$ zusammen mit dem Spursatz B.1.2.

gültig, falls $\partial\Omega$ ein krummliniges $C^{1,1}$ Polygon ist. Den vollständigen Beweis kann man in [Gri1,2] finden.

Der Satz B.2.2 löst leider nicht alle unsere Probleme. Die Lösungen der gemischten Randwertaufgaben in Abschnitt 3.1 sind nicht in $H^2(\Omega)$, sondern nur in $H^1(\Omega; \Delta)$. Deswegen müssen wir einen Satz wie B.2.2 für solche Funktionen ableiten. Da wenig Regularität von u verlangt wird, werden weitere Regularitätsannahmen für v nötig sein, um das auszugleichen. In der Tat, der Spursatz B.1.6 garantiert die Dualität zwischen $\gamma_j u_{\nu_j}$ und $\gamma_j v$ in (B.2), falls $u \in H^1(\Omega; \Delta)$ und $v \in H^1(\Omega)$ mit $\gamma_j v \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_j)$, $j = 1, \dots, N$ sind. Das kann zusammengefaßt werden in

Satz B.2.3 *Sei $u \in H^1(\Omega; \Delta)$ und $v \in \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_j v \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_j), j = 1, \dots, N\}$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u_{\nu} v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx.$$

Die nächsten zwei Sätze beschreiben einige Eigenschaften der Spur von H^1 -Funktionen, die in der Formulierung des Iterationsverfahrens in Abschnitt 3.1 nötig sind.

Satz B.2.4 *Sei $N = 2$, d.h. $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$ und $u \in H^1(\Omega)$. Wenn $\gamma_1 u$ in $H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$ liegt, dann liegt $\gamma_2 u$ in $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)$.*

Beweis:

Sei $u \in H^1(\Omega)$ mit $\gamma_1 u \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$. Es existiert nach Definition von $H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$ ein $v \in H_0^1(\Omega \cup \Gamma_1)$ mit $\gamma_1(u - v) = 0$.⁵ Die H^1 -Funktion $w := u - v$ genügt offensichtlich

$$\gamma_1 w = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_2 w = \gamma_2 u.$$

Dann ist $w \in H_0^1(\Omega \cup \Gamma_2)$ und $\gamma_2 w \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2)$. ■

Satz B.2.5 *Sei $N = 2$, d.h. $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$ und u eine harmonische Funktion in $H^1(\Omega)$. Wenn $\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \nu_1}$ in $H^{-1/2}(\Gamma_1)$ liegt, dann liegt $\gamma_2 \frac{\partial u}{\partial \nu_2}$ in $H^{-1/2}(\Gamma_2)$.*⁶

Beweis:

Sei u harmonisch in $H^1(\Omega)$ mit $\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \nu_1} \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$. Für $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_2)$ setzen wir $v_{\varphi} := \gamma_2^{-1} \varphi$.⁷ Damit definieren wir das lineare Funktional

⁵Nach Definition ist $H_0^1(\Omega \cup \Gamma_1) := \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_2 v \equiv 0\}$.

⁶Man sollte bemerken, daß $H^{-1/2}(\Gamma_2) = H^{1/2}(\Gamma_2)'$ ist, denn es gilt $H_0^{1/2}(\Gamma_2) = H^{1/2}(\Gamma_2)$.

⁷Der Operator γ_2^{-1} ist der stetige *Lift* von $H^{1/2}(\Gamma_2)$ nach $H^1(\Omega)$ so, daß $\gamma_2 \circ \gamma_2^{-1}$ die Identität auf $H^{1/2}(\Gamma_2)$ ist. Die Existenz von γ_2^{-1} wird in Bemerkung B.1.5 diskutiert.

$$F(\varphi) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v_{\varphi} \, dx - \int_{\Gamma_1} u_{\nu_1} v_{\varphi} \, d\Gamma$$

auf $H^{1/2}(\Gamma_2)$. Die Beschränktheit von F folgt aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} |F(\varphi)| &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\gamma_2^{-1} \varphi\|_{H^1(\Omega)} + \|\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \nu_1}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \|\gamma_1 \gamma_2^{-1} \varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \\ &\leq c \left(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \nu_1}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \right) \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}. \end{aligned}$$

Sei nun $\varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_2) \subset H^{1/2}(\Gamma_2)$. Die Sätze B.2.4 und B.2.3 implizieren

$$F(\varphi) = \int_{\Gamma_2} u_{\nu_2} \varphi \, d\Gamma.$$

Die Behauptung des Satzes folgt aus der Dichtheit der Einbettung $H_{00}^{1/2}(\Gamma_2) \hookrightarrow H^{1/2}(\Gamma_2)$. ■

B.3 Gemischte Probleme

Bevor wir die gemischten Probleme betrachten, benötigen wir das

Lemma B.3.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glattes beschränktes Gebiet, $u \in \mathcal{D}(\Omega)'$ und $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dann gilt*

$$(-\Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v).^8 \tag{B.3}$$

Die Gleichung (B.3) gilt auch für Funktionen $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.⁹

Was wir noch für die Untersuchung der gemischten Problemen brauchen, ist eine *Poincarésche Ungleichung* auf $H_0^1(\Omega \cup \Gamma_j)$, wobei das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und die Randstücke Γ_j wie in Anhang B.1 definiert sind. Zur Verfügung haben wir in dieser Situation den

Satz B.3.2 *Für Ω und Γ_j wie in Anhang B.1 und $u \in H_0^1(\Omega \cup \Gamma_j)$ gilt*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei die Konstante c nur von Ω abhängt.¹⁰

⁸Mit (\cdot, \cdot) wird hier die Dualität zwischen $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ und $\mathcal{D}(\Omega)'$ angedeutet.

⁹Die letzte Behauptung folgt, wie in Satz B.2.1, aus einem Dichtheitsargument.

¹⁰Der Beweis ist relativ technisch und ist in [Tr] S. 69 zu finden.

Wir betrachten das folgende gemischte Problem auf Ω . Für $f \in H^{1/2}(\Gamma_l)$ und $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ finde eine H^1 -Lösung von

$$(GP) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ in } \Omega \\ u = f & , \text{ auf } \Gamma_l \\ u_\nu = g & , \text{ auf } \Gamma_r \\ u_\nu = 0 & , \text{ auf } \Gamma_i \end{cases} .$$

Die Existenz, die Eindeutigkeit und die stetige Abhängigkeit von den Randdaten für das (GP) folgen grundsätzlich aus dem

Satz B.3.3 *Für jedes Paar $(f, g) \in H^{1/2}(\Gamma_l) \times H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ besitzt (GP) eine einzige Lösung $u \in H^1(\Omega)$. Weiter gilt*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\|f\|_{H^{1/2}(\Gamma_l)} + \|g\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'} \right). \quad (B.4)$$

Beweis:

Aus dem Korollar B.1.4 folgt die Existenz einer Funktion $\tilde{f} \in H^1(\Omega)$ mit $\tilde{f}|_{\Gamma_l} = f$. Betrachten wir das Variationsproblem

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla v \, dx = \int_{\Gamma_r} g v \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \tilde{f} \nabla v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (B.5)$$

wobei $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega \cup \Gamma_i \cup \Gamma_r)$ ist.¹¹

Die Bilinearform $\langle \nabla \cdot, \nabla \cdot \rangle$ ist koerziv auf $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ wegen Satz B.3.2. Der Satz von Lax–Milgram garantiert dann die Existenz und Eindeutigkeit in \mathcal{V} der Lösung dieses Variationsproblems, falls die rechte Seite von (B.5) in \mathcal{V}' ist. Nennt man $l(v)$ die rechte Seite von (B.5), dann folgt die Beschränktheit des linearen Funktionals l aus der Ungleichung

$$|l(v)| \leq \|g\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'} \|v|_{\Gamma_r}\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)} + \|\nabla \tilde{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (B.6)$$

In der letzten Ungleichung wurde stillschweigend benutzt, daß der Dirichlet–Spuroperator eine stetige Abbildung von \mathcal{V} nach $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)$ ist.¹²

Aus Lemma B.3.1 und Gleichung (B.5) für $v \in H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{V}$ folgt

$$\int_{\Omega} \Delta(w + \tilde{f}) v \, dx = \int_{\Omega} \nabla(w + \tilde{f}) \nabla v \, dx = 0.$$

¹¹Der Raum \mathcal{V} ist wie auch $H_0^1(\Omega)$ ein abgeschlossener Teilraum von $H^1(\Omega)$.

¹²Für Details siehe [DaLi] S. 397

Dann ist $u := w + \tilde{f} \in H^1(\Omega)$ harmonisch und offensichtlich genügt $u|_{\Gamma_l} = f$. Aus Satz B.2.3 und Gleichung (B.5) für $v \in H_0^1(\Omega \cup \Gamma_r) \subset \mathcal{V}$ folgt

$$\int_{\Gamma_r} u_\nu v \, d\Gamma = \int_{\Gamma_r} g v \, d\Gamma.$$

Daraus folgt, daß $u_\nu = g$ in Sinne von $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'$ ist, denn der Dirichlet–Spuroperator ist eine stetige surjektive Abbildung von $H_0^1(\Omega \cup \Gamma_r)$ nach $H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)$.¹³

Aus einem ähnlichen Argument folgt $u_\nu = 0$ auf Γ_i . Dann ist u eine Lösung von (GP). Die Eindeutigkeit von u folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung w des Variationsproblems (B.5).

Die Ungleichung (B.4) ist nämlich eine Konsequenz des Lax–Milgram Satzes. In der Tat liefert dieser Satz die Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \alpha^{-1} \|l\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

wobei α die Koerzivitätskonstante der bilinearen Form in (B.5) ist. Aus der Abschätzung (B.6) folgt aber

$$\|l\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c \left(\|\tilde{f}\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_r)'} \right).$$

Die Ungleichung (B.4) folgt dann aus Bemerkung B.1.5. ■

Der nächste Satz liefert eine Darstellung der H^1 –Lösung von (GP), die in Abschnitt 3.2 nützlich sein wird. Der Satz kann in Grisvard [Gri1,2] oder Wendland [Wn] gefunden werden.¹⁴

Satz B.3.4 *Für Randdaten $f \in H^{3/2}(\Gamma_l)$ und $g \in H^{1/2}(\Gamma_r)$, läßt sich die H^1 –Lösung u von (GP) als*

$$u = h + \sum_{i=1}^2 \alpha_i u_i \tag{B.7}$$

darstellen, wobei $h \in H^2(\Omega)$ ist, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und u_i die singulären H^1 –Funktionen

$$u_i(r, \theta) = r_i^{1/2} \sin \frac{\theta_i}{2}$$

sind. Hier ist r_1 (bzw. r_2) die Entfernung zwischen $z = (r, \theta) \in \Omega$ und dem Punkt $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $(0, -1)$); θ_1 (bzw. θ_2) ist der Winkel zwischen $z - (0, 1)$ (bzw. $z - (0, -1)$) und der Tangente zu $\partial\Omega$ durch $(0, 1)$ (bzw. $(0, -1)$) in der Richtung von Γ_l .

¹³Für Details siehe [DaLi] S. 397

¹⁴Elliptische Probleme auf eckigen Gebieten werden auch in [Da] betrachtet.

Bemerkung B.3.5 *Die Existenz und Eindeutigkeit für das Problem (GP) mit Randdaten $(f, g) \in H^{3/2}(\Gamma_l) \times H^{1/2}(\Gamma_r)$ wird analog wie in Satz B.3.3 bewiesen. Obwohl diese Randdaten höhere Regularität besitzen, ist die Lösung i.A. nicht besser als $H^1(\Omega)$. Der Satz B.3.4 erlaubt uns, dieses Ergebnis zu verschärfen, indem er eine genaue Beschreibung des singulären Anteils der Lösung gibt.*

Literaturverzeichnis

- [Ad] R.A.ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [Ag] S.AGMON, *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, Van Nostrand Mathematical Studies No.2, 1965.
- [Au1] J.P.AUBIN, *Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems*, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington New York, 1980.
- [Au2] J.P.AUBIN, *Applied Functional Analysis*, John Willey & Sons, New York Chichester Brisbane Toronto, 1979.
- [BaG1] G.E.BACKUS UND J.F.GILBERT, *Numerical applications of a formalism for geophysical inverse Problems*, Geophys. J.R. Astron. Soc. **13** 247–276, 1967.
- [BaG2] G.E.BACKUS UND J.F.GILBERT, *The resolving power of gross earth data*, Geophys. J.R. Astron. Soc. **16** 169–205, 1968.
- [BaG3] G.E.BACKUS UND J.F.GILBERT, *Uniqueness in the inversion of inaccurate gross earth data*, Phil. Trans. R. Soc. A**266** 123–192, 1970.
- [Ban] R.E.BANK, *PLTMG: A software package for solving elliptic partial differential equations*, Siam, Philadelphia, 1990.
- [Bas] G.BASTAY, *Iterative Methods for Ill-Posed Boundary value Problems*, Linköping Studies in Science and Technology, Dissertations No. **392**, Linköping, 1995.
- [Bau] J.BAUMEISTER, *Stable Solution of Inverse Problems*, Fried.Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1987.
- [Ca] T.CARLEMAN, *Fonctions quasi-analitiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [Ch] G.CHAVENT, *Generalized Sentinels Defined Via Least Squares*, Appl. Math. Optimization **31**, No.2 189-218, 1995.
- [ChZh] G.CHEN UND J.ZHOU, *Boundary Element Methods*, Academic Press, London San Diego New York Boston Sydney Tokyo Toronto, 1992.

- [Da] M.DAUGET, *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg Tokyo, 1988.
- [DaLi] R.DAUTRAY UND J.L.LIONS, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 2, Functional and Variational Methods*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988.
- [Fo] G.B.FOLLAND, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Oxford, 1976.
- [GiTr] D.GILBARG UND N.TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.
- [Gri1] P.GRISVARD, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Publishing, London, 1985.
- [Gri2] P.GRISVARD, *Singularities in Boundary Value Problems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [Gro1] C.W.GROETSCH, *Elements of Applicable Functional Analysis*, Marcel Dekker, New York Basel, 1980.
- [Gro2] C.W.GROETSCH, *The theory of Tikhonov regularisation for Fredholm equations of the first kind*, Springer-Verlag, Pitman Publishing, Boston London Melbourne, 1984.
- [Gro3] C.W.GROETSCH, *Inverse Problems in Mathematical Sciences*, Fried.Vieweg & Sohn, Braunschweig Wiesbaden, 1993.
- [Ha] W.HACKBUSH, *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [HaSo] H.HAARIO UND E.SOMERSALO, *The Backus-Gilbert Method Revisited: Background, Implementation and Examples*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz. **9**, 917-943, 1987.
- [Had] J.HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris, 1932.
- [Han] H.HAN, *The Finite Element Methode in a Family of Improperly Posed Problems*, Mathematics of Computation, Vol **38**, No. **157**, 1982.
- [Hö] L.HÖRMANDER, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1963.
- [Ho] B.HOFMANN, *Regularisation for Applied Inverse and Ill-Posed Problems*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [Hu] S.P.HUESTIS, *The Backus-Gilbert problem for sampled band limited functions*, Inverse Problems **8**, 1992.

- [IBM] IBM, *Engineering and Scientific Subroutine Library, Guide and Reference, Release 4*, Publication No. SC23-0184-5, Fifth Edition, 1990.
- [Is] V.M.ISAKOV, *On the Uniqueness of the Solution of the Cauchy Problem*, Soviet Math. Dokl. Vol **22** No. **3** 639–642, 1980.
- [Je] H.JEGGLE, *Nichtlineare Funktionalanalysis*, Teubner, Stuttgart, 1979.
- [Jo] F.JOHN, *Partial Differential Equations*, Springer–Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971.
- [JoNa] M.JOURHMANE UND A.NACHAOU, *A Relaxation Algorithm for Solving a Cauchy–Problem*, Preliminary Proceedings–Vol **2**, 2nd Intern. Confer. on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Le Croisic, June 1996.
- [Ki] A.KIRSCH, B.SCHOMBURG UND G.BERENDT, *The Backus–Gilbert Method*, NAM–Bericht No. **59**, Institut für numerische und Angewandte Mathematik, Universität Göttingen, Februar 1988.
- [Kra] M.A.KRASNOSEL'SKII, G.M.VAINIKKO, P.P.ZABREIKO, YU.B.RUTITSKII UND V.YU.STETSENKO *Approximate Solution of Operator Equations*, Wolters–Nordhoff Publishing, Groningen, 1972.
- [Krs] R.KRESS, *Linear Integral Equations*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong, 1989.
- [Krg] R.KREYZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York ... Toronto, 1978.
- [LiMa] J.L.LIONS UND E.MAGENES, *Non–Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.
- [Lo1] A.K.LOUIS, *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Teubner, Stuttgart, 1989.
- [Lo2] A.K.LOUIS, *Approximate inverse for linear and some nonlinear problems*, Inverse Problems **12** 175–190, 1996.
- [LoM1] A.K.LOUIS UND P.MAASS, *A mollifier method for linear operator equations of the first kind*, Inverse Problems **6** 427–440, 1990.
- [LoM2] A.K.LOUIS UND P.MAASS, *Smoothed projection methods for the moment problem*, Numer. Math. **59** 277–294, 1991.
- [Ma] V.A.KOZLOV, V.G.MAZ'YA UND A.V.FOMIN, *An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations* Comput.Maths.Phys., Vol. **31**, No. **1** 45–52, 1991.
- [Mi] C.MIRANDA, *Partial Differential Equations of Elliptic Type*, Springer–Verlag, 1970.

- [Mo] R.S.FALK UND P.B.MONK, *Logarithmic Convexity for Discrete Harmonic Functions and the Approximation of the Cauchy Problem for Poisson's Equation*, Mathematics of Computation, Vol. **47**, No. **175** 135–149, 1996.
- [Od] J.T.ODEN UND J.N.REDDY, *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, John Wiley & Sons, New York London Sidney Toronto, 1976.
- [Pi] W.PIPER, *Über die Existenz von Fixpunkten nichtexpansiver Abbildungen und deren Bestimmung mittels Iterationsverfahren*, Diplomarbeit, FB Mathematik, J.W. Goethe–Universität, Frankfurt am Main, 1988.
- [Ru1] W.RUDIN, *Functional Analysis*, McGraw–Hill, New York . . . Toronto, 1973.
- [Ru2] W.RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw–Hill, New York . . . Sydney, 1966.
- [ScBe] B.SCHOMBURG UND G.BERENT, *On the convergence of the Backus–Gilbert algorithm*, Inverse Problems **3**, 341–346, 1987.
- [Sh] R.E.SHOWALTER, *Hilbert Space Methods for Partial Differential*, Pittman Publishing, London San Francisco Melbourne, 1977.
- [Sn] R.SNIEDER, *An extention of Backus–Gilbert theory to nonlinear inverse problems*, Inverse Problems **7**, 409–433, 1991.
- [StFi] G.STRANG UND G.J.FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [Tre] F.TREVES, *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York . . . London, 1975.
- [Tro] G.M.TROIANELLO, *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems*, Plenum Press, New York, 1987.
- [Wd] J.WEIDMANN, *Lineare Operatoren in Hilberträume*, Teubner, Stuttgart, 1976.
- [Wn] W.L.WENDLAND, E.STEPHAN UND G.C.HSIAO, *On the integral equation method for the plane mixed boundary value problem of the laplacian* Math. Meth. in the Appl.Sci. **1** 265–321, 1979.
- [Yo] K.YOSHIDA, *Funktional Analysis*, Fourth Edition, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.

Stichwortverzeichnis

- adjungierte Gleichung, viii, 3, 60
- asymptotische Regularität, 33

- Backus–Gilbert Methode, 3, 5, 48, 57

- Cauchy–Kowalewsky, 6, 9, 15
- charakteristische Mannigfaltigkeit, 15
- Chavent, 51

- Distribution, 75
- distributionelle Ableitung, 75

- elliptisches Cauchy–Problem, 1

- Fixpunktgleichung, 3, 24, 41, 45, 47

- Glattungsfunktionale, 4
- Greensche Darstellungsformel, 18, 20
- Greensche Formel, 84
- Grisvard, 88

- Hadamard, 2
- Holmgren, 6, 9, 16

- Iterationsverfahren, 3, 4, 6, 21

- Konvergenzgeschwindigkeit, 3, 36
- Korrektgestellttheit, 2
- Korrekturformel, 59
- Krasnosel’skii, 4
- Kreisringgeometrie, 9, 13, 28, 38

- Lax–Milgram, 19, 87
- local maps, 79
- Louis, 51

- Maz’ya, 3, 4
- Methode der finiten Differenz, 71, 72
- Methode der finiten Elemente, 65, 72

- Mollifier, 51
- Momentenproblem, 48, 55

- Nichtexpansivität, 3, 33
- Normalgleichung, 51

- Partition der Eins, 79
- Peakedness Condition, 50
- Poincaréschen Ungleichung, 31
- pseudo–Konvergenz, 72

- Raum
 - $C^\infty(\Omega)$, 74
 - $C^\infty(\bar{\Omega})$, 74
 - $C_0^k(\Omega)$, 75
 - $C_0^k(\Omega \cup \Gamma)$, 75
 - $H^1(\Omega; \Delta)$, 77
 - $H^k(\Omega)$, 76
 - $H_0^k(\Omega)$, 76
 - $H_0^k(\Omega \cup \Gamma)$, 76
 - $H^s(\Omega)$, 77
 - $H^s(\mathbb{R}^n)$, 77
 - $H_0^s(\Omega)$, 77
 - $H_{00}^s(\Omega)$, 77

- Rechteckgeometrie, 12, 25
- Regularisierung, 39

- Schlechtgestellttheit, 2, 3
- Spektraldarstellung, 5, 8, 27, 29, 40
- Spektralschar, 40
- Spline, 56
- Spursatz, 81

- Tikhonov, 51

- Wendland, 88